УДК 681.3

Л.С. Файнзильберг, О.А. Жуковская

Интервальная модель принятия решений коллективом независимых экспертов

На основе байесовских стратегий, построена интервальная модель принятия коллективного решения группы независимых экспертов в условиях риска. Модель не требует априорных знаний о вероятностях ошибок экспертов, а допускает известными только частоту ошибок, допущенных при оценке случайных состояний объекта по экспериментальной выборке ограниченного объема. Приведен модельный пример.

On the basis of the Bayes' strategy the interval model of the collective decision-making by a group of independent experts under conditions of risk is constructed. The model does not require a priori knowledge of the probabilities of mistakes of the experts, but assumes to be known only the frequency of their mistakes committed in the estimation of object's random conditions on a limited set of samples. The modeling example is given.

На грунті на байєсових стратегій побудовано інтервальну модель прийняття колективного рішення групи незалежних експертів в умовах ризику. Модель не потребує апріорних знань про ймовірності помилок експертів, а припускає відомими частоту помилок, допущених при оцінці випадкових станів об'єкта за експериментальною вибіркою обмеженого обсягу. Наведено модельний приклад.

Введение. При решении ряда прикладных задач часто возникает необходимость повышения качества принимаемых решений путем объединения различных специалистов в коллектив, вырабатывающий общее решение [1]. Примером такого коллектива может служить медицинский консилиум, принимающий коллективное решение о текущем состоянии пациента на основе учета разных мнений – частных решений экспертов [2].

Существуют разные подходы к интеграции частных решений экспертов, например, методы голосования, ранжирования, попарного сравнения предпочтений, а также методы нечеткой логики [3–5]. В условиях риска оптимальное коллективное решение может быть построено на основе байесовских стратегий.

В работе [6] предложна оптимальная байесовская модель, обеспечивающая минимум средней вероятности ошибки коллективного решения в предположении, что априори известны вероятности ошибок каждого из экспертов коллектива. Однако при решении практических задач такие априорные сведения чаще всего недоступны. Поэтому в работе [7] авторами предложена интервальная модель, предполагающая всего лишь знания частот ошибочных решений экспертов и показано, что такая модель с заданной доверительной вероятностью обеспечивает минимум средней вероятности ошибки коллективного решения.

В то же время известно, что средняя вероятность ошибочных решений не учитывает соотношение потерь от ошибок разного рода, которые для большинства практических задач неравнозначны. Например, известно [2], что при скрининге опасных заболеваний потери, связанные со случайным пропуском больного пациента во много раз превышает потери от ошибочного причисления здорового пациента к группе больных.

Цель данной работы – обобщение предложенных ранее интервальных моделей на случай, когда критерием оптимальности служит минимум среднего риска коллективного решения.

Постановка задачи

Пусть некоторый объект находится в одном из множества возможных состояний $V = \{V_1,...,V_m\}$, $m = \overline{1,M}$. Каждый из N экспертов $A_1,..., A_N$ независимо друг от друга принимают частные решения о текущем состоянии объекта в виде индикаторной переменной

$\delta_i = m$, если A_i принял решение в пользу

$$V_m,\ m = \overline{1,M},\ i = \overline{1,N}. \quad (1)$$

Предполагается, что на основе репрезентативной выборки n наблюдений с известными состояниями объекта определено число случаев n_k, когда объект находился в состоянии V_k, а также число случаев $n_{mk}^{(i)}$, когда i-й эксперт принял частное решение в пользу состояния V_m, в то время как объект находился в состоянии V_k.

При таких априорных сведениях ставится задача построения модели принятия коллективного решения

$D = m$, если коллектив принял решение в пользу V_m, $m = \overline{1,M}$,

которая с заданной доверительной вероятностью β обеспечит минимум среднего риска коллективного решения на множестве

$$\textbf{И} = \{S_{m_1 \dots m_N} : (\delta_1 = m_1) \wedge \dots \wedge (\delta_N = m_N),$$
$$m_1, \dots, m_N = \overline{1,M}\} \quad (2)$$

возможных комбинаций $S_{m_1 \dots m_N}$ частных решений экспертов (1).

Оптимальная модель принятия коллективных решений

Прежде чем переходить к решению поставленной задачи рассмотрим оптимальную модель принятия коллективных решений, основанную на минимизации среднего риска.

Лемма 1. Пусть

а) известно распределение вероятностей состояний объекта $P(V_k), \sum_{k=1}^{M} P(V_k) = 1$;

б) известны условные вероятности $P(\delta_i = m \mid V_k)$, $m,k = \overline{1,M}$, $i = \overline{1,N}$ частных решений каждого из $N \geq 2$ независимых экспертов коллектива;

в) задана платежная матрица $L = \|L_{km}\|$, элементы которой характеризуют потери от коллективного решения $D = m$, $m = \overline{1,M}$ при истинном состоянии объекта V_k, $k = \overline{1,M}$.

Тогда коллективное решение $D = m$, $m = \overline{1,M}$ будет оптимальным по критерию минимума среднего риска на множестве возможных ситуаций (2), если коллективное решение принимается по схеме

$$D_S^{opt} = \arg \min_{D_S \in [1,M]} \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i \mid V_k), \quad (3)$$

где $D_S = \overline{1,M}$ – коллективное решение в наблюдаемой ситуации $S \in \textbf{И}$.

Доказательство. Запишем средний риск, определяющий математическое ожидание потерь от коллективных решений в виде

$$R(D) = \sum_{S \in \textbf{И}} \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k, S), \quad (4)$$

где L_{kD_S} – элемент платежной матрицы $L = \|L_{km}\|$, когда в наблюдаемой ситуации $S \in \textbf{И}$ соответствует коллективному решению $D_S = m$, $m = \overline{1,M}$ и k-му состоянию объекта, $k = \overline{1,M}$, а $P(V_k, S)$ – совместная вероятность двух случайных событий: объект находится в состоянии V_k и наблюдается определенная комбинация $S = (\delta_1, \dots, \delta_N)$ личных решений экспертов $\delta_1, \dots, \delta_N$, выраженных в форме (1).

Согласно теореме умножения вероятностей величину $P(V_k, S)$ можно представить в виде

$$P(V_k, S) = P(S) P(V_k \mid S).$$

Подставив это выражение в (4), получим

$$R(D) = \sum_{S \in \textbf{И}} P(S) \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k \mid S). \quad (5)$$

Как видно из (5), средний риск $R(D)$ имеет вид суммы по S. Поэтому для каждой отдельной комбинации $S \in \textbf{И}$ можно строить оптимальное коллективное решение независимо от других комбинаций так, чтобы минимизировать условный риск, т.е.

$$D_S^{opt} = \arg \min_{D_S \in [1,M]} R(D_S),$$

где

$$R(D_S)=\sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k \mid S)\,. \qquad (6)$$

Поскольку предполагается, что эксперты принимают свои решения независимо друг от друга, то при известных вероятностях $P(V_k)$ и $P(\delta_i = m \mid V_k)$ для каждой комбинации $S = (\delta_1,...,\delta_N)$ личных решений экспертов можно определить апостериорные вероятности

$$P(V_k \mid S)=\frac{P(V_k)\prod_{i=1}^{N} P(\delta_i \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k)\prod_{i=1}^{N} P(\delta_i \mid V_k)}\,.$$

Подстановка последнего выражения в (6) дает

$$R(D_S)=\sum_{k=1}^{M} L_{kD_S}\,\frac{P(V_k)\prod_{i=1}^{N} P(\delta_i \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k)\prod_{i=1}^{N} P(\delta_i \mid V_k)}\,. \qquad (7)$$

Так как знаменатель в (7) положителен, то минимум среднего риска (4) будет обеспечен на всем множестве (2), если в каждой наблюдаемой ситуации $S \in \mathbf{И}$ коллективное решение принимается согласно условию (3). Лемма 1 доказана.

Субоптимальная модель принятия коллективных решений

Понятно, что на практике применение оптимальной модели затруднительно, поскольку точные значения вероятностных характеристик, фигурирующих в правой части (3), чаще всего неизвестны. Поэтому перейдем от оптимальной модели (3) к ее интервальному аналогу, используя следующее определение.

Определение. Коллективное решение $\widetilde{D}=m$, $m=\overline{1,M}$ будем называть субоптимальным с точки зрения критерия $\Im$, если $\widetilde{D}$ обеспечивает $\Im$ с заданной доверительной вероятностью.

Понятно, что неизвестные точечные значения априорных вероятностей $P(V_k)$, $P(\delta_i = m \mid V_k)$ могут быть оценены частотами, вычисленными по репрезентативной выборке из n наблюдений с известными состояниями объекта:

$$P^*(V_k)=\frac{n_k}{n},\ P^*(\delta_i = m \mid V_k)=\frac{n_{mk}^{(i)}}{n_k},\ i=\overline{1,N},$$
$$k,m=\overline{1,M}, \qquad (8)$$

где n_k – число наблюдений, когда объект находился в состоянии V_k, $n_{mk}^{(i)}$ – число случаев, когда i-й эксперт принял частное решение в пользу состояния V_m, в то время как объект находился в состоянии V_k.

Очевидно, что замена неизвестных вероятностных характеристик оценками (8) правомерна только при достаточно большом объеме наблюдений n.

В то же время из теории вероятностей [9] известно, что для любого значения частоты можно построить доверительный интервал, который с доверительной вероятностью β накроет неизвестное значение вероятностной характеристики, т.е.

$$P(V_k) \in \langle P_{V_k}^c(n,\beta), r_{V_k}(n,\beta)\rangle, \qquad (9)$$

$$P(\delta_i \mid V_k) \in \langle P_{mk}^c(n,\beta), r_{mk}(n,\beta)\rangle, \qquad (10)$$

где $P_{V_k}^c=\dfrac{P_{V_k}^*+\dfrac{t_\beta^2}{2n}}{1+\dfrac{t_\beta^2}{n}}$, $r_{V_k}=\dfrac{t_\beta\sqrt{\dfrac{P_{V_k}^*(1-P_{V_k}^*)}{n}+\dfrac{t_\beta^2}{4n^2}}}{1+\dfrac{t_\beta^2}{n}}$ –

соответственно центр и радиус доверительного интервала, который с доверительной вероятностью β накроет неизвестное значение вероятности нахождения объекта в состоянии V_k, а

$$P_{\delta_i|V_k}^c=\frac{P_{\delta_i|V_k}^*+\dfrac{t_\beta^2}{2n}}{1+\dfrac{t_\beta^2}{n}},\ r_{\delta_i|V_k}=\frac{t_\beta\sqrt{\dfrac{P_{\delta_i|V_k}^*(1-P_{\delta_i|V_k}^*)}{n}+\dfrac{t_\beta^2}{4n^2}}}{1+\dfrac{t_\beta^2}{n}} \ –$$

центр и радиус доверительного интервала, который с доверительной вероятностью β накроет неизвестное значение вероятности ошибки личного решения i-го эксперта, $i=\overline{1,N}$, а $t_\beta = \arg F\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ – функция, обратная гауссовой функции распределения $F\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$.

Согласно (3), минимум среднего риска (6) будет обеспечен, если в каждой наблюдаемой ситуации S принимать коллективное решение $\widetilde{D}=l$, $l=\overline{1,M}$, если

$$\widetilde{R}_S(l) < \widetilde{R}_S(m),\ \forall m=\overline{1,M}, m \neq l, \qquad (11)$$

где

$$\widetilde{R}_S(l) = \sum_{k=1}^{M} L_{kl} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = l \mid V_k), \qquad (12)$$

$$\widetilde{R}_S(m) = \sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = m \mid V_k). \qquad (13)$$

На основе соотношений (11)–(13) построим субоптимальную модель, гарантирующую принятие субоптимальных решений коллектива экспертов в ситуациях противоречий их личных решений согласно критерию минимума среднего риска.

Будем характеризовать возможные потери от коллективного решения $\widetilde{D}=m$, $m=\overline{1,M}$ при истинном состоянии объекта V_k интервальной платежной матрицей $\mathbf{L}=\|\mathbf{L}_{km}\|$, где

$$\mathbf{L}_{km} = \langle L_{km}^c, r_{L_{km}} \rangle. \qquad (14)$$

Учитывая (9)–(10), перейдем от соотношений (12), (13) к их интервальным аналогам

$$\widetilde{\mathbf{R}}_S(l) = \sum_{k=1}^{M} \langle L_{kl}^c, r_{L_{kl}} \rangle \langle P_{V_k}^c, r_{V_k} \rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P_{lk}^c, r_{lk} \rangle, \qquad (15)$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_S(m) = \sum_{k=1}^{M} \langle L_{km}^c, r_{L_{km}} \rangle \langle P_{V_k}^c, r_{V_k} \rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P_{mk}^c, r_{mk} \rangle. \qquad (16)$$

Согласно условию (11) оптимальное коллективное решение должно приниматься на основе сравнения точечных величин $\widetilde{R}_S(l) \in \widetilde{\mathbf{R}}_S(l)$, $\widetilde{R}_S(m) \in \widetilde{\mathbf{R}}_S(m)$, $\forall m=\overline{1,M}$, $m \neq l$, что возможно только при $\widetilde{\mathbf{R}}_S(l) \cap \widetilde{\mathbf{R}}_S(m) = \varnothing$.

Теорема. Коллективное решение $\widetilde{D}=l$, $l=\overline{1,M}$ субоптимально по критерию минимума среднего риска ошибки на множестве (2) возможных ситуаций S, если это решение принимается на пользу l-го состояния $l=\overline{1,M}$ при условии

$$\widetilde{R}_l^c + r_{\widetilde{R}_l} < \widetilde{R}_m^c - r_{\widetilde{R}_m},\ \forall m=\overline{1,M}, m \neq l, \qquad (17)$$

где

$$\widetilde{R}_l^c + r_{\widetilde{R}_l} = \sum_{\substack{k\in[1,M]\\ k\neq l}} (L_{kl}^c + r_{L_{kl}})(P_{V_k}^c + r_{V_k}) \prod_{i=1}^{N} (P_{lk}^c + r_{lk}) + $$

$$+\begin{cases} (L_{ll}^c + r_{L_{ll}})(P_{V_l}^c + r_{V_l}) \prod_{i=1}^{N} (P_{ll}^c + r_{ll}), \\ \qquad \text{если } (L_{ll}^c \geq r_{L_{ll}}) \vee (|L_{ll}^c| < r_{L_{ll}}), \\ (L_{ll}^c + r_{L_{ll}})(P_{V_l}^c - r_{V_l}) \prod_{i=1}^{N} (P_{ll}^c - r_{ll}), \\ \qquad \text{если } L_{ll}^c \leq -r_{L_{ll}}, \end{cases} \qquad (18)$$

$$\widetilde{R}_m^c - r_{\widetilde{R}_m} = \sum_{\substack{k\in[1,M]\\ k\neq m}} (L_{km}^c - r_{L_{km}})(P_{V_k}^c - r_{V_k}) \prod_{i=1}^{N} (P_{mk}^c - r_{mk}) + $$

$$+\begin{cases} (L_{mm}^c - r_{L_{mm}})(P_{V_m}^c - r_{V_m}) \prod_{i=1}^{N} (P_{mm}^c - r_{mm}), \\ \qquad \text{если } L_{mm}^c \geq r_{L_{mm}}, \\ (L_{mm}^c - r_{L_{mm}})(P_{V_m}^c + r_{V_m}) \prod_{i=1}^{N} (P_{mm}^c + r_{mm}), \\ \qquad \text{если } (L_{mm}^c \leq -r_{L_{mm}}) \vee (|L_{mm}^c| < r_{L_{mm}}). \end{cases} \qquad (19)$$

Доказательство. Так как по определению доверительного интервала с доверительной вероятностью β выполняются условия

$$P(V_k) \in \langle P_{V_k}^c(n,\beta), r_{V_k}(n,\beta) \rangle,$$

$$P(\delta_i = m \mid V_k) \in \langle P_{mk}^c(n,\beta), r_{mk}(n,\beta) \rangle,$$

а $L_{km} \in \langle L_{km}^c, r_{L_{km}} \rangle$, то с доверительной вероятностью β^{i+1} точечные значения $\widetilde{R}_S(l)$, $\widetilde{R}_S(m)$, $\forall m=\overline{1,M}, m\neq l$, определяемые соотношениями (12), (13), принадлежат соответственно интервалам $\widetilde{\mathbf{R}}_S(l)$, $\widetilde{\mathbf{R}}_S(m)$, которые определяются соотношениями (15), (16), т.е. $\tilde{R}_S(l) \in \in \tilde{\mathbf{R}}_S(l)$, $\tilde{R}_S(m) \in \tilde{\mathbf{R}}_S(m)$.

Отсюда непосредственно следует, что при выполнении условия (17) с доверительной вероятностью β^{i+1} будет выполняться условие (11), которое, согласно лемме, гарантирует оптимальность коллективного решения по критерию минимума среднего риска на множестве (2) возможных ситуаций S.

Для определения центров $\tilde{R}_l^c, \tilde{R}_m^c$ и радиусов $r_{\tilde{R}_l}, r_{\tilde{R}_m}$ необходимо выполнить соответствующие арифметические операции над интервалами в форме центр–радиус, которые фигурируют в (15) и (16), в частности операцию умножения. Согласно [10], произведение двух действительных интервалов $A = \langle a, r_a \rangle$ и $B = \langle b, r_b \rangle$ в форме центр–радиус, где a, b – центры, а r_a, r_b – радиусы интервалов A и B соответственно, определяются следующим образом:

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(ab)\, r_a r_b, |a| r_b + |b| r_a \rangle, \text{ если } \frac{|a|}{r_a} \ge 1, \quad \frac{|b|}{r_b} \ge 1, \tag{20}$$

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(b)\, a r_b, |b| r_a + r_a r_b \rangle, \text{ если } \frac{|a|}{r_a} < 1, \quad \frac{|a|}{r_a} < \frac{|b|}{r_b}. \tag{21}$$

Из определения доверительного интервала следует, что

$$\frac{P_{V_k}^c}{r_{V_k}} > 1, \ \frac{P_{lk}^c}{r_{lk}} > 1, \ \frac{P_{mk}^c}{r_{mk}} > 1. \tag{22}$$

Относительно интервальных элементов $\mathbf{L}_{km} = \langle L_{km}^c, r_{L_{km}} \rangle$ платежной матрицы будем считать только то, что потери от ошибочных решений всегда положительны и больше, чем «потери» от правильных решений, т.е.

$$L_{km}^c - r_{L_{km}} > 0, \ L_{km}^c - r_{L_{km}} > L_{kk}^c + r_{L_{kk}}, \ \forall m \ne k, \tag{23}$$

допуская, что центр L_{kk}^c может быть как положительным, так и отрицательным. В последнем случае «потери» будут характеризовать выигрыш от правильных решений.

Учитывая эти ограничения, запишем (15) в виде

$$\tilde{\mathbf{R}}_S(l) = \sum_{\substack{k \in [1,M] \\ k \ne l}} \langle L_{kl}^c, r_{L_{kl}} \rangle \langle P_{V_k}^c, r_{V_k} \rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P_{lk}^c, r_{lk} \rangle +$$
$$\langle L_{ll}^c, r_{L_{ll}} \rangle \langle P_{V_l}^c, r_{V_l} \rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P_{ll}^c, r_{ll} \rangle. \tag{24}$$

Применяя соотношения (20), (21) для умножения интервалов, фигурирующих в (24), и учитывая ограничения (22), (23), получим левую часть (11). Аналогично из (16) можно найти и правую часть (11). Теорема доказана.

Модельный пример. Пусть объект находится в одном из трех возможных состояний V_1, V_2, V_3. На основе предварительных экспериментов по выборке $n = 230$ наблюдений с известными состояниями объекта оценены частные решения пяти экспертов. Результаты такой оценки приведены в табл. 1. В соответствующем элементе таблицы указано число случаев, в которых i-й эксперт принял частное решение $\delta_i = m, m = 1,2,3$, а объект находился в состоянии V_k, k = 1, 2, 3..

Таблица 1. Результаты эксперимента на выборке n = 230 наблюдений

Решения экспертов	Истинные состояния объекта		
	V_1	V_2	V_3
$\delta_1 = 1$	117	14	5
$\delta_1 = 2$	7	53	1
$\delta_1 = 3$	14	2	18
$\delta_2 = 1$	97	2	2
$\delta_2 = 2$	14	57	9
$\delta_3 = 3$	28	10	12
$\delta_3 = 1$	98	17	1
$\delta_3 = 2$	28	48	2
$\delta_3 = 3$	12	3	20
$\Delta_4 = 1$	129	3	5
$\delta_4 = 2$	6	45	1
$\delta_4 = 3$	3	21	17
$\delta_5 = 1$	110	3	1
$\delta_5 = 2$	7	59	7
$\delta_5 = 3$	21	7	15

Из табл. 1 следует, что в 138 случаях объект находился в состоянии V_1, в 69 – в состоянии V_2 и в 23 – в состоянии V_3, т.е. вероятности состояния объекта могут быть оценены частотами $P^*_{V_1} = 0{,}6$, $P^*_{V_2} = 0{,}3$, $P^*_{V_3} = 0{,}1$.

Используя данные таблицы, оценим условные вероятности (частоту) частных решений экспертов в различных ситуациях. Результаты расчетов сведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Частота частных решений экспертов

Решение экспертов	Состояния объекта		
	V_1	V_2	V_3
$\delta_1 = 1$	0,848	0,2	0,2
$\delta_1 = 2$	0,052	0,775	0,025
$\delta_1 = 3$	0,1	0,025	0,775
$\delta_2 = 1$	0,7	0,025	0,1
$\delta_2 = 2$	0,1	0,825	0,4
$\delta_3 = 3$	0,2	0,15	0,5
$\delta_3 = 1$	0,71	0,25	0,05
$\delta_3 = 2$	0,2	0,7	0,1
$\delta_3 = 3$	0,09	0,05	0,85
$\delta_4 = 1$	0,935	0,05	0,2
$\delta_4 = 2$	0,04	0,65	0,05
$\delta_4 = 3$	0,025	0,3	0,75
$\delta_5 = 1$	0,8	0,05	0,05
$\delta_5 = 2$	0,05	0,85	0,3
$\delta_5 = 3$	0,15	0,1	0,65

Предположим, что при анализе новой ситуации, когда объект находился в неизвестном состоянии, эксперты приняли следующие противоречивые частные решения $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$, $\delta_3 = 1$, $\delta_4 = 3$, $\delta_5 = 2$, т.е. первый и третий эксперт отнесли состояние объекта к классу V_1, второй и пятый – к классу V_2, а четвертый – к классу V_3

Будем характеризовать возможные потери от коллективного решения $\tilde{D} = m$, $m = \overline{1{,}3}$ при истинном состоянии объекта V_k, $k = \overline{1{,}3}$ интервальной матрицей потерь (в форме центр–радиус), представленной в табл. 3. Заметим, что выигрыш при правильных решениях задают отрицательные «потери» (диагональные элементы платежной матрицы).

Т а б л и ц а 3. Интервальная матрица потерь от коллективного решения

Решения	Истинные значения массивов		
	V_1	V_2	V_3
$\tilde{D} = 1$	$\langle -0.75, 0.25 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 25, 5 \rangle$
$\tilde{D} = 2$	$\langle 22.5, 2.5 \rangle$	$\langle -7.5, 2.5 \rangle$	$\langle 13.5, 1.5 \rangle$
$\tilde{D} = 3$	$\langle 12.5, 0.5 \rangle$	$\langle 5.5, 0.5 \rangle$	$\langle -7, 3 \rangle$

На основе имеющихся данных построим субоптимальное с заданной доверительной вероятностью $\beta = 0{,}99$ коллективное решение $\tilde{D} = m$, $m = \overline{1{,}3}$ в ситуации

$$(\delta_1 = 1) \wedge (\delta_2 = 2) \wedge (\delta_3 = 1) \wedge (\delta_4 = 3) \wedge (\delta_5 = 2).$$

Для этого проверим выполнение условия (17), используя формулы (18), (19), значения частот $P^*_{V_1} = 0{,}6$, $P^*_{V_2} = 0{,}3$, $P^*_{V_3} = 0{,}1$ и данные, приведенные в табл. 2 и 3. Результаты проверки сведены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4. Результаты проверки условия (17)

Условие	Проверка	Результат
$\tilde{R}_1^c + r_{\tilde{R}_1} < \tilde{R}_2^c - r_{\tilde{R}_2}$	$0.27 < -0.13$	Не выполняется
$\tilde{R}_2^c + r_{\tilde{R}_2} < \tilde{R}_1^c - r_{\tilde{R}_1}$	$-0.004 < 0.016$	**Выполняется**
$\tilde{R}_3^c + r_{\tilde{R}_3} < \tilde{R}_1^c - r_{\tilde{R}_1}$	$0.17 < 0.016$	Не выполняется
$\tilde{R}_1^c + r_{\tilde{R}_1} < \tilde{R}_3^c - r_{\tilde{R}_3}$	$0.27 < -0.0006$	Не выполняется
$\tilde{R}_2^c + r_{\tilde{R}_2} < \tilde{R}_3^c - r_{\tilde{R}_3}$	$-0.004 < -0.0006$	**Выполняется**
$\tilde{R}_3^c + r_{\tilde{R}_3} < \tilde{R}_2^c - r_{\tilde{R}_2}$	$0.17 < -0.13$	Не выполняется

Как видно из табл. 4, выполняются такие условия $\tilde{R}_2^c + r_{\tilde{R}_2} < \tilde{R}_1^c - r_{\tilde{R}_1}$, $\tilde{R}_2^c + r_{\tilde{R}_2} < \tilde{R}_3^c - r_{\tilde{R}_3}$.

Следовательно, в соответствии с условием (17) в данном случае субоптимальное коллективное решение принимается в пользу состояния V_2.

Примечательно, что оценка априорной вероятности состояния V_2, полученная по экспериментальной выборке, составляет всего 0,3 и только два из пяти экспертов указали на это состояние. Тем не менее, в соответствии с доказанной теоремой, именно такое решение будет оптимальным с заданной доверительной вероятностью с точки зрения минимума среднего риска на множестве возможных ситуаций.

Заключение. Построенная на основе байесовских стратегий интервальная модель принятия решений коллективом независимых экспертов в условиях риска не требует априорных знаний о вероятностях ошибок экспертов, а предполагает известными только частоту их ошибок, допущенных при оценке случайных состояний объекта на экспериментальной выборке ограниченного объема. Разработанная модель с заданной доверительной вероятностью гарантирует минимум среднего риска на множестве возможных комбинаций частных решений экспертов.

1. *Pattanaik P.K.* Voting and collective choice. Some aspects of the theory of group decision making. – Cambridge: Univ. Press, 1975. – 265 p.
2. *Власов В.В.* Эффективность диагностических исследований. – М: Медицина, 1988. – 256 с.
3. *Веревка О.В.*, *Парасюк И.Н.* Математические основы построения нечетких байесовских механизмов вывода // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 1. – С. 105–117.
4. *Веревка О.В.*, *Заложенкова И.А.*, *Парасюк И.Н.* Интервальные байесовские механизмы и их приложения // Пробл. программирования. – 2000. – № 1–2. – С. 467–470.
5. *Растригин Л.А.*, *Эренштейн Р.Х.* Метод коллективного распознавания. – М.: Энергоиздат, 1981. – 79 с.
6. *Барабаш Ю.Л.* Коллективные статистические решения при распознавании. – М: Радио и связь, 1983. – 224 с.
7. *Файнзильберг Л.С.* Байєсова схема принятия коллективных решений в условиях противоречий // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 3. – С. 112–122.
8. *Жуковская О.А.*, *Файнзильберг Л.С.* Интервальное обобщение байесовской модели принятия коллективного решения в конфликтных ситуациях // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 3. – С. 133–144.
9. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 575 с.
10. *Жуковська О.А.*, *Новицький В.В.* Прямий метод обчислення добутку інтервалів у формі центр–радіус // Наук. вісті НТУУ «КПІ». – 2003. – № 1. – С. 138–144.

Поступила 07.06.2007

Тел. для справок: (044) 526-1154, 454-9859 (Киев)