Опубликовано в Международном научно-техническом журнале «Проблемы управления и информатики». – 2019. – № 1. – С. 100-112.

УДК 519.81(075.8)

О.А. Жуковская, Л.С. Файнзильберг

БАЙЕСОВА СТРАТЕГИЯ ПРИНЯТИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ И ЕЕ ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Ключевые слова: коллективное решение, эксперт, средний риск

Введение

Известный прием повышения качества принятия решений – объединение специалистов определенной области в группу экспертов, которые формируют коллективное решение [1,2]. Идея коллективного решения активно применяют также при построении «коллектива» формальных алгоритмов (Multiple Classifier Systems), что позволяет повысить эффективность решающих правил в задачах классификации наблюдаемых ситуаций [3,4] и восстановления зависимостей по выборкам экспериментальных данных [5].

Основная цель интеграции частных решений заключается в формировании компромиссного коллективного решения, которое в той или иной мере будет «согласовано» с отдельными предпочтениями членов коллектива. Однако само понятие такой согласованности не формализовано, что приводит к субъективности окончательного решения.

Кроме того, почти все известные модели формирования коллективных решений используют эвристические процедуры, которые требуют настройки параметров. Поэтому окончательные решения в значительной степени субъективно и зависят от опыта и интуиции лица, осуществляющего такую настройку.

В работах [6,7] рассмотрены байесовые модели интеграции частных решений экспертов в условиях противоречий, обеспечиваюший минимум средней вероятности ошибки коллективного решения. Цель настоящей статьи – дальнейшее развитие этого подхода.

Постановка задачи. Пусть некоторый объект находится в одном из M возможных состояний множества $V=\{V_1,...,V_M\}$ с априорными вероятностями $P(V_m)$, $\sum_{m=1}^{M}P(V_m)=1$. Пользуясь дополнительной информацией, $N\geq 2$ независимых экспертов принимают частные решения о текущем состоянии объекта в виде индикаторной переменной

$$\delta_i = m\,, \tag{1}$$

когда i-й эксперт, $i=\overline{1,N}$, принял решение в пользу состояния V_m, $m=\overline{1,M}$.

Понятно, что в общем случае множество

$$\mathbf{\Theta}=\{S_{m_1...m_N}:(\delta_1=m_1)\wedge\ldots\wedge(\delta_N=m_N),\ m_1,\ldots,m_N=\overline{1,M}\}\,, \tag{2}$$

возможных ситуаций содержит M^N комбинаций $S_{m_1\ldots m_N}$ частных решений экспертов, причем только в M случаях решения (1) будут одинаковые, а в остальных случаях частные решения противоречивы.

Требуется построить модель коллективного решения, которая на основании частных решений (1) обеспечит формирование коллективного решения

$$D = m, \quad m = \overline{1, M}, \tag{3}$$

удовлетворяющее критерию минимуму среднего риска на множестве ситуаций (2).

Заметим, что существует достаточно широкий класс прикладных задач, для которых актуальна указанная постановка.

Задача 1 (медицинский консилиум). Каждый из N врачей некоторой группы, опираясь на результаты клинических обследований, относит текущее состояние конкретного пациента к одному из классов множества диагнозов $V = \{V_1, ..., V_M\}$, например к трем состояниям:

V_1 **- условно здоров,** V_2 **– воспалительный процесс,** V_3 **– онкология.**

Задача 2 (скоринг). Каждый из N независимых экспертов коммерческого банка, основываясь на доступной информации, определяет возможность предоставления кредита конкретному заемщику, то есть относит его одному из двух типов:

V_1 **– надежный,** V_2 **– ненадежный.**

Задача 3. N специалистов наблюдают за работой технического агрегата и по косвенным внешним признакам (звуку, уровню вибраций и пр.) определяет принадлежность текущего состояния агрегата к одному из трех возможных состояний:

V_1 **- штатное,** V_2 **– предаварийное,** V_3 **- аварийное.**

Задача 4. Каждая из N станций слежения, основываясь на доступной информации об объекте в воздушном пространстве, принимает одно из двух возможных решений

V_1 **– свой,** V_2 **– чужой.**

Для всех приведенных задач, перечень которых может быть продолжен, требуется принять коллективное решение, обеспечивающее минимум среднего риска на множестве частных решений отдельных членов коллектива, которые могут быть *противоречивы*.

Современное состояние проблемы принятия коллективных решений

Прежде чем непосредственно переходить к решению сформулированной задачи дадим краткую информацию об известных подходах к формированию коллективных решений.

Анализ доступных публикаций показывает, что на современном этапе сформировалось два направления научных исследований, которые дополняют друг друга.

Основное внимание *первого направления* уделяется психологическим аспектам проблемы принятия коллективных решений [8]. В этих работах исследуются принципы формирования коллектива экспертов, организации самой процедуры проведения экспертизы и эмоциональному воздействию участников коллектива друг на друга.

Именно психологические аспекты организации процедуры коллективных экспертиз, которые базируется на противоречивых идеях экспертов, составляют основу классической модели Delphi [9, 10] и ее развития Argument Delphi Technique [11].

Проведенный анализ результатов практического применения метода Delphi на выборке более 3000 экспертных групп [12], позволил сформировать дополнительные рекомендации по формированию коллектива экспертов.

Понятно, что метод Delphi также, как и аналогичный метод TOPSIS [13, 14] и другие популярные технологии так или иначе опираются на математическую обработку результатов экспертиз. Но именно *психологические* аспекты формирования коллективного решения занимают главное место в этих технологиях.

Здесь уместно провести аналогию с конфликтологией – научной дисциплиной, которая изучает лишь психологические аспекты развития и разрешения конфликтов в отличие от теории игр, основанной на математических моделях формирования решений в условиях активного противодействия.

Разработка и анализ математических моделей принятия коллективных решений составляют основу *второго направления*. В подавляющем числе научных публикаций формальный подход к задаче построения коллективного решения основан на методах многокритериальной оптимизации, когда частные решения экспертов рассматривают как отдельные критерии. Это позволяет использовать существующий математический аппарат для получения коллективного решения. Именно такой подход рассматривается во многих публикациях, в частности в работах [15, 16].

Примечательно, что применение математического аппарата многокритериальной оптимизации к задаче формирования коллективных решений позволил получить ряд новых научных результатов. Например, в работе [16] предложен оригинальный метод последовательной оценки альтернатив с учетом компетенции экспертов в предположении, что отдельные эксперты оценивает не все пары объектов. Предложен также метод поддержки принятия решений на основе целевого динамического оценивания альтернатив с учетом вероятностей их реализации [17].

В работе [18, 19] доказано, что в процессе формирования коллективного решения двусторонние соглашения между экспертами могут увеличить или уменьшить вероятность поиска компромиссов в зависимости от того, имеют ли такие соглашения внешние последствия. Показано [20], что учет особенности задачи обработки экспертной информации позволяет найти равновесие Нэша коллективного решения. Опираясь на фундаментальное понятие равновесия Нэша автор работы [21] доказал, что концепция коалиционного равновесия является обобщением равновесия Нэша и является своеобразным компромиссом каждого игрока с другими.

Важным шагом в развитии математических методов принятия коллективного решения являются работы, основанные на нечетких множествах Заде. В частности, в работе [14] вводится расширение метода TOPSIS для обработки нечетких множественных атрибутов групповых решений и показывается, что при использовании предложенного метода решения задачи получается с меньшим вычислительной сложности. Результаты эффективного совершенствования методов многокритериальной оптимизации на основе использования нечетких множеств представлены в работах [22- 27] и других публикациях.

Таким образом современная наука располагает достаточно обширным математическим аппаратом для формирования коллективных решений. В то же время, как справедливо указано в работе [28], практически все существующие системы формируют неоднозначное коллективное решение. На модельных экспериментах доказано [29], что применение методов ELECTRE, TOPSIS и других популярных технологий для обработки одних и тех данных приводит к различным результатам, которые существенно зависит как от количества альтернатив, так и от числа экспертов, формирующих коллективное решение.

Один из популярных методов построения коллективного решения – правило голосования, различные варианты которого до сих пор активно используется при решении практических задач [30-32]. Коллективным решением считается альтернатива, получившая наибольшую поддержку экспертов.

На первый взгляд метод голосования, основанный на здравом смысле, кажется наиболее справедливым. В то же время известно [33], что справедливое решение формируется только в том случае, когда число возможных альтернатив равно двум ($M = 2$). Если же $M > 2$, то различные схемы приводят к парадоксам [34] – парадоксу Борда, Кондорсе, Симпсона, Остогорского и другим, что еще раз подтверждает крылатое выражение: «Наука начинается там, где заканчивается здравый смысл».

Кеннет Эрроу из Стенфордского университета доказал знаменитую теорему [35], в соответствии с которой не существует идеального коллективного выбора, удовлетворяющего аксиомам справедливого голосования, кроме назначения диктатором одного из экспертов, мнение которого навязывается другим экспертам.

Из сказанного следует, что на сегодня научную проблему интеграции частных решений экспертов в согласованное коллективное решение еще нельзя считать разрешенной.

Байесова стратегия коллективного решения

Опираясь на результаты работы [6], сформулируем лемму, которая понадобиться в дальнейших исследованиях.

Лемма. Будем характеризовать «квалификацию» каждого i -го эксперта, $i=\overline{1,N}$ квадратной $M\times M$ квалификационной матрицей

$$\Re_i=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

диагональные элементы которой характеризуют вероятности правильных решений $P(\delta_i=m\,|\,V_k)$ этого эксперта в ситуациях, когда истинное состояние объекта V_k и $m=k$, а остальные элементы – вероятности ошибочных решений $P(\delta_i=m\,|\,V_k)$, когда i-й эксперт отнес объект к состоянию V_m, в то время как он находился в состоянии V_m при $m\neq k$.

Пусть далее

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1M} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M1} & L_{M2} & \cdots & L_{MM} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

– платежная матрица, которая характеризует потери L_{km} от коллективного решения $D=m$, $m=\overline{1,M}$ при истинном состоянии объекта V_k, $k=\overline{1,M}$.

Тогда коллективное решение $D=m$, $m=\overline{1,M}$ оптимально с точки зрения минимума среднего риска на множестве (2) возможных комбинаций частных решений отдельных экспертов, если решение (3) принимать по схеме

$$D_S^{opt}=\arg\min_{D_S\in[1,M]}\sum_{k=1}^{M}L_{kD_S}P(V_k)\prod_{i=1}^{N}P(\delta_i=m\,|\,V_k). \qquad (6)$$

где $D_S=\overline{1,M}$ – коллективное решение в наблюдаемой ситуации $S\in\mathbf{\Theta}$.

Доказательство. Запишем средний риск (математическое ожидание потерь от коллективного решения) в виде

$$R(D)=\sum_{S\in\mathbf{\Theta}}\sum_{k=1}^{M}L_{kD_S}P(V_k,S), \qquad (7)$$

де L_{kD_S} – элемент платежной матрицы (5), который соответствует решению $D_S=m$, $m=\overline{1,M}$ при k-м состоянию объекта, $k=\overline{1,M}$, а $P(V_k,S)$ – совместная вероятность двух случайных событий: объект находится в состоянии V_k и наблюдается некоторая комбинация $S=(\delta_1,...,\delta_N)$ частных решений экспертов $\delta_1,...,\delta_N$, выраженных в форме (1).

По теореме умножения вероятностей величину $P(V_k,S)$ можно представить так:

$$P(V_k,S)=P(S)P(V_k\,|\,S).$$

Подстановка последнего выражения в (7) дает

$$R(D)=\sum_{S\in\mathbf{\Theta}}P(S)\sum_{k=1}^{M}L_{kD_S}P(V_k\,|\,S). \qquad (8)$$

Из (8) следует, что средний риск $R(D)$ имеет вид суммы по S. Поэтому для каждой конкретной ситуации $S\in\mathbf{\Theta}$ можно строить оптимальное коллективное решение независимо от других комбинаций частных решений экспертов так, чтобы минимизировать условный риск, т.е.

$$D_S^{opt} = \arg \min_{D_S \in [1, M]} R(D_S),$$

где

$$R(D_S) = \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k \mid S). \tag{9}$$

По условию допускается, что эксперты принимают частные решения независимо один от другого. Поэтому для каждой комбинации $S = (\delta_1, ..., \delta_N)$ частных решений по известным вероятностях $P(V_k)$ и $P(\delta_i = m \mid V_k)$ можно вычислить апостериорные вероятности по формуле

$$P(V_k \mid S) = \frac{P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = m \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = m \mid V_k)}.$$

Подстановка последнего выражения в (9) дает

$$R(D_S) = \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} \frac{P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = m \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = m \mid V_k)}. \tag{10}$$

Поскольку знаменатель (10) положительный, то минимум среднего риска (7) на всем множестве (2) достигается, если в каждой наблюдаемой ситуации $S \in \mathbf{\Theta}$ коллективное решение принимать в соответствии с (6). Лемма доказана.

Байесова схема принятия решений может быть существенно упрощена, если допустить, что элементы платежной матрицы (5) удовлетворяют условию

$$L_{km} = \begin{cases} 0 \text{ при } m = k \\ 1 \text{ при } m \neq k \end{cases}, \tag{11}$$

т.е. потери от правильных решений равны нулю, а потери от любого неправильного решения равны единице.

При выполнении условия (11) средний риск (7) вырождается в среднюю вероятность ошибочных решений. В этом случае из леммы вытекает такое следствие.

Следствие. Коллективное решение обеспечивает минимум средней вероятности ошибки на множестве (2) возможных комбинаций частных решений, если в каждой конкретной ситуации $S \in \mathbf{\Theta}$ принимать решение по схеме

$$D_S^{opt} = \arg \max_{1 \le k \le M} P(V_k) \prod_{i \in J_k} [1 - P^{(i)}(E \mid V_k)] \prod_{i \notin J_k} P^{(i)}(E \mid V_k), \tag{12}$$

где J_k – подмножество номеров экспертов, которые в ситуации $S \in \mathbf{\Theta}$ приняли *правильные* частные решение $\delta_i = k$ в пользу состояния V_k, $k = \overline{1, M}$, причем

$$J_\mu \cap J_\nu = \varnothing \quad \forall \mu, \nu = \overline{1, M}, \; J_1 \cup ... \cup J_M = \{1, ..., M\},$$

а $P^{(i)}(E \mid V_k)$ – условные вероятности ошибочных решений каждого из экспертов при истинном состоянии объекта V_k.

В самом деле, при выполнении условий (11) оптимальное коллективное решение сводится к правилу максимуму апостериорных вероятностей

$$P(V_k \mid S) = \frac{P(V_k)P(S \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k)P(S \mid V_k)}. \tag{13}$$

Очевидно, что величина $P(S \mid V_k)$, которая фигурирует в правой части (13), представляет собою вероятность того, что эксперты, номера которых принадлежат подмножеству J_k, приняли правильное решение, а остальные эксперты ошиблись. Поэтому в силу условной независимости частных решений экспертов с учетом обозначения величины $P^{(i)}(E \mid V_k)$ апостериорные вероятности (13) можно представить в виде

$$P(V_k \mid S) = \frac{P(V_k)\prod_{i\in J_k}[1 - P^{(i)}(E \mid V_k)]\prod_{i\notin J_k} P^{(i)}(E \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k)\prod_{i\in J_k}[1 - P^{(i)}(E \mid V_k)]\prod_{i\notin J_k} P^{(i)}(E \mid V_k)}. \tag{14}$$

Из соотношения (14) непосредственно следует, что коллективное решение обеспечит минимум средней вероятности ошибки на множестве (2), если в каждой конкретной ситуации $S \in \mathbf{\Theta}$ коллективное решение принимать по схеме (12).

Для иллюстрации рассмотрим модельный пример.

Модельный пример. Пусть некоторый объект находится в одном из трех состояний, которые образуют полную группу случайных событий с априорными вероятностями $P(V_1) = 0{,}7$, $P(V_2) = 0{,}08$ и $P(V_3) = 0{,}22$. Текущее состояние объекта оценивают пять независимых экспертов. Условные вероятности ошибок экспертов и комбинация принятых частных решений представлены в таблице.

Таблица. Условные вероятности ошибок и частные решения экспертов

Эксперт	Вероятности ошибок			Частные решение
	$P^{(i)}(E \mid V_1)$	$P^{(i)}(E \mid V_2)$	$P^{(i)}(E \mid V_3)$	δ_i
Первый	0,04	0,01	0,03	$\delta_1 = 1$
Второй	0,01	0,03	0,02	$\delta_2 = 3$
Третий	0,03	0,05	0,01	$\delta_3 = 2$
Четвертый	0,02	0,02	0,06	$\delta_4 = 2$
Пятый	0,01	0,05	0,04	$\delta_5 = 3$

Из таблицы видно, что в данном случае частные решения экспертов противоречивы, причем $J_1 = \{1\}$, $J_2 = \{3{,}4\}$, $J_3 = \{2{,}5\}$.

Для принятия коллективного решения вычислим величины

$$P(V_1)\prod_{i\in J_1}[1 - P^{(i)}(E \mid V_1)]\prod_{i\notin J_1} P^{(i)}(E \mid V_1) = 4{,}03\cdot 10^{-8},$$

$$P(V_2)\prod_{i\in J_2}[1 - P^{(i)}(E \mid V_2)]\prod_{i\notin J_2} P^{(i)}(E \mid V_2) = 1{,}12\cdot 10^{-6},$$

$$P(V_3)\prod_{i\in J_3}[1 - P^{(i)}(E \mid V_3)]\prod_{i\notin J_3} P^{(i)}(E \mid V_3) = 3{,}73\cdot 10^{-6}.$$

Поскольку третья из указанных величин максимальна, то в соответствии с правилом (12) принимаем коллективное решение в пользу состояния V_3. Заметим, что наибольшую априорную вероятность имеет состояние V_1, а не V_3.

Субоптимальные модели коллективных решений

Рассмотренные выше модели принятия оптимальных коллективных решений основаны на известных вероятностных характеристиках $P(V_k)$, $k=\overline{1,M}$ и $P(\delta_i = m\,|\,V_k)$, $m=\overline{1,M}$, $i=\overline{1,N}$, которые могут быть предварительно оценены частотами соответствующих событий по выборке наблюдений:

$$P^*(V_k) = \frac{n_k}{n}\ ,\ k=\overline{1,M}\,, \tag{15}$$

$$P^*(\delta_i = m\,|\,V_k) = \frac{n_{mk}^{(i)}}{n_k},\ i=\overline{1,N}\,,\ m=\overline{1,M}\,,\ k=\overline{1,M}\,, \tag{16}$$

где n – общее число наблюдений, n_k – число наблюдений, при которых объект находился в состоянии V_k ($\sum_{k=1}^{M} n_k = n$), а $n_{mk}^{(i)}$ – число случаев, при которых i-й эксперт приняв частное решение в пользу состояния V_m, $m=\overline{1,M}$, в то время как объект находился в состоянии V_k, $k=\overline{1,M}$.

Понятно, что замена вероятностей $P(V_k)$ и $P(\delta_i = m\,|\,V_k)$ точечными оценками (15), (16) правомерна лишь при $n \to \infty$. Поэтому представляет интерес *обобщение* предложенных моделей на случаи, когда вместо точечных значений вероятностей $P(V_k)$ и $P(\delta_i = m\,|\,V_k)$ используют их доверительные интервалы.

Из теории вероятности известно [36], что частота P^* случайного события, вычисленная по выборке наблюдений объемом n, с доверительной вероятностью β определяет доверительный интервал $\mathbf{I} = [P^{(1)}, P^{(2)}]$ вероятности P, границы которого определяются формулами:

$$P^{(1)} = \frac{p^* + \frac{1}{2}\frac{t_\beta^2}{n} - t_\beta\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{1}{4}\frac{t_\beta^2}{n^2}}}{1+\frac{t_\beta^2}{n}}\ , \tag{17}$$

$$P^{(2)} = \frac{p^* + \frac{1}{2}\frac{t_\beta^2}{n} + t_\beta\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{1}{4}\frac{t_\beta^2}{n^2}}}{1+\frac{t_\beta^2}{n}}\,, \tag{18}$$

где $t_\beta = \arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right) > 0$, а

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau$$

Основная идея, которая будем использована для интервального обобщения моделей, состоит в следующем.

Пусть для двух точечных значений $R_a \in [R_a^{(1)}, R_a^{(2)}]$ и $R_b \in [R_b^{(1)}, R_b^{(2)}]$ необходимо проверить выполняется ли условие

$$R_b < R_a\,. \tag{19}$$

Очевидно, что при $[R_a^{(1)}, R_a^{(2)}] \cap [R_b^{(1)}, R_b^{(2)}] = \varnothing$ для такой проверки достаточно убедиться в том, что

$$R_b^{(2)} < R_a^{(1)}, \tag{20}$$

т.е. нижняя граница одного интервала превышает верхнюю границу другого (рис.1).

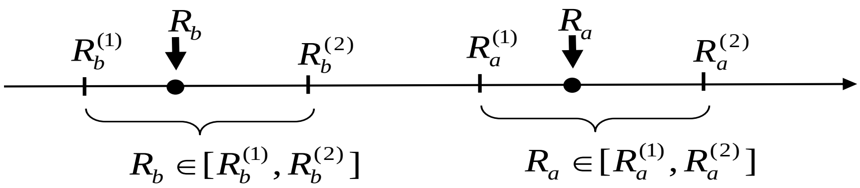

Рис. 1. Проверка выполнения условия (19) для интервальных величин

Если же $[R_a^{(1)}, R_a^{(2)}] \cap [R_b^{(1)}, R_b^{(2)}] \neq \varnothing$, т.е. интервалы возможных значений R_a и R_b пересекаются, то проверка условия (20) не гарантирует выполнение неравенства (19) для *всех* возможных значений R_a и R_b.

Определение. Коллективное решение $\tilde{D} = m$, $m = \overline{1, M}$ будем называть субоптимальным с точки зрения критерия $\Im$, если $\tilde{D}$ обеспечивает $\Im$ с заданной доверительной вероятностью.

В соответствии с (6) минимум среднего риска (7) будет достигнут, если на основе частных решений экспертов в каждой наблюдаемой ситуации $S \in \mathbf{\Theta}$ принимать коллективное решение $\tilde{D} = m$, $m = \overline{1, M}$ при выполнении неравенств

$$R_m < R_l\,, \quad \forall l = \overline{1, M},\ l \neq m, \tag{21}$$

где

$$R_m = \sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = m \,|\, V_k)\,, \tag{22}$$

$$R_l = \sum_{k=1}^{M} L_{kl} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = l \,|\, V_k)\,. \tag{23}$$

Перейдем от точечные значения величин R_m, R_l к их интервальным аналогам $\mathbf{R}_m = [R_m^{(1)}, R_m^{(2)}]$ и $\mathbf{R}_l = [R_l^{(1)}, R_l^{(2)}]$. Тогда, согласно (19), (20), для проверки условия (21) достаточно убедится в том, что

$$R_m^{(2)} < R_l^{(1)}. \tag{24}$$

Из (22), (23) следует, что интервалы $\mathbf{R}_m = [R_m^{(1)}, R_m^{(2)}]$ и $\mathbf{R}_l = [R_l^{(1)}, R_l^{(2)}]$ можно определить так:

$$\mathbf{R}_m = \sum_{k=1}^{M} [L_{km}^{(1)}, L_{km}^{(2)}][P_{V_k}^{(1)}, P_{V_k}^{(2)}] \prod_{i=1}^{N} [P_{km}^{(1)}, P_{km}^{(2)}] \tag{25}$$

$$\mathbf{R}_l = \sum_{k=1}^{M} [L_{kl}^{(1)}, L_{kl}^{(2)}][P_{V_k}^{(1)}, P_{V_k}^{(2)}] \prod_{i=1}^{N} [P_{kl}^{(1)}, P_{kl}^{(2)}], \tag{26}$$

где $[P_{V_k}^{(1)}, P_{V_k}^{(2)}]$ – доверительные интервалы вероятностей $P(V_k)$ состояний объекта, $[P_{km}^{(1)}, P_{km}^{(2)}]$ и $[P_{kl}^{(1)}, P_{kl}^{(2)}]$ – доверительные интервалы вероятностей $P(\delta_i = m \,|\, V_k)$ и $P(\delta_i = l \,|\, V_k)$, $i = 1, \ldots, N$ фигурирующих в соответствующих элементах квалификационной матрицы (4), а $[L_{km}^{(1)}, L_{km}^{(2)}]$ и $[L_{kl}^{(1)}, L_{kl}^{(2)}]$ – интервалы, которым принадлежат соответствуюшие элементы платежной матрицы (5)[1].

В соответствии с (25), (26) проверка условия (21) требует выполнения интервальных арифметических операций, которые существенно упрощаются, если границы интервальных величин имеют одинаковые знаки. В этом случае достаточно выполнить арифметические операции над соответсвующими границами.

Например, результат сложения и умножения двух интервалов $A=[a^{(1)}, a^{(2)}]$, $0<a^{(1)}<a^{(2)}$ и $B=[b^{(1)}, b^{(2)}]$, $0<b^{(1)}<b^{(2)}$ имеет вид

$$A+B=[a^{(1)}+b^{(1)}, a^{(2)}+b^{(2)}], \tag{27}$$

$$AB=[a^{(1)}b^{(1)}, a^{(2)}b^{(2)}]. \tag{28}$$

По определению границы доверительных интервалов $[P_{V_k}^{(1)}, P_{V_k}^{(2)}]$, $[P_{km}^{(1)}, P_{km}^{(2)}]$, $[P_{kl}^{(1)}, P_{kl}^{(2)}]$, которым принадлежат соответствующие вероятности, всегда положительны. Если допустить, что правильные решения приводят к определенным потерям, которые, разумеется, меньше потерь от неправильных, то правомерно допустить, что границы интервалов $[L_{km}^{(1)}, L_{km}^{(2)}]$ и $[L_{kl}^{(1)}, L_{kl}^{(2)}]$, фигурирующих в (25),(26) положительны.

В этом частном случае на основании (21)–(28) можно сформулировать такую теорему.

Теорема 1. При выполнении условий

$$\sum_{k=1}^{M} L_{km}^{(2)} \prod_{i=1}^{N} P_{V_k}^{(2)} P^{(2)}(\delta_i \mid V_k) < \sum_{k=1}^{M} L_{kl}^{(1)} \prod_{i=1}^{N} P_{V_k}^{(1)} P^{(1)}(\delta_i \mid V_k), \qquad \forall l=1,..M$$

коллективное решение $\tilde{D}=m$, $m=\overline{1,M}$ субоптимально с точки зрения минимума среднего риска на множестве (2) возможных ситуаций S.

Рассмотрим теперь общий случай, когда границы некоторых интервалов, принадлежащих диагонали платежной матрицы (5), могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательными потерями будем считать выигрыши от правильных решений.

Известно [37], что в общем случае результат умножения интервалов $A=[a^{(1)}, a^{(2)}]$ и $B=[b^{(1)}, b^{(2)}]$ с произвольными границами имеет вид

$$AB=[\min\{a^{(1)}b^{(1)},\ a^{(1)}b^{(2)},\ a^{(2)}b^{(1)},\ a^{(2)}b^{(2)}\}, \max\{a^{(1)}b^{(1)},\ a^{(1)}b^{(2)},\ a^{(2)}b^{(1)},\ a^{(2)}b^{(2)}\}], \tag{29}$$

Из формулы (29) следует, что результат умножения интервала $A=[a^{(1)}, a^{(2)}]$, $0<a^{(1)}<a^{(2)}$ на интервал $B=[b^{(1)}, b^{(2)}]$ определяется выражением

$$AB=\begin{cases} [a^{(1)}b^{(1)},\ a^{(2)}b^{(2)}], & \text{если } 0<b^{(1)}<b^{(2)}, \\ [a^{(2)}b^{(1)},\ a^{(1)}b^{(2)}], & \text{если } b^{(1)}<b^{(2)}\le 0, \\ [a^{(2)}b^{(1)},\ a^{(2)}b^{(2)}], & \text{если } b^{(1)}<0<b^{(2)}. \end{cases} \tag{30}$$

Принимая во внимание (30) нетрудно показать, что в общем случае справедлива такая теорема.

Теорема 2. Коллективное решение $\tilde{D}=m$, $m=\overline{1,M}$ субоптимально с точки зрения минимума среднего риска на множестве (2) возможных ситуаций S, если это решение принимать при выполнении условий (24), где

[1] Поскольку при решении прикладных задач точные значения потерь L_{km} чаще всего неизвестны разумно характеризовать такие потери интервальной платежной матрицей, элементы которой, в отличие от матрицы (5), заданы в виде интервальных величин $\mathbf{L}_{km}=[L_{km}^{(1)}, L_{ml}^{(2)}]$

$$R_m^{(2)} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{M} L_{km}^{(2)} \prod_{i=1}^{N} P_{V_k}^{(2)} P^{(2)}(\delta_i \mid V_k) +$$

$$+\begin{cases} L_{mm}^{(2)} \prod\limits_{i=1}^{N} P_{V_k}^{(2)} P^{(2)}(\delta_i \mid V_k), & \text{если} \quad 0 < L_{mm}^{(1)} < L_{mm}^{(2)} \ \text{ или } \ L_{mm}^{(1)} < 0 < L_{mm}^{(2)}, \\ L_{mm}^{(2)} P_{V_k}^{(1)} \prod\limits_{i=1}^{N} P^{(1)}(\delta_i \mid V_k), & \text{если} \quad L_{mm}^{(1)} < L_{mm}^{(2)} \le 0, \end{cases}$$

а

$$R_l^{(1)} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{M} L_{kl}^{(1)} \prod_{i=1}^{N} P_{V_k}^{(1)} P^{(1)}(\delta_i \mid V_k) +$$

$$+\begin{cases} L_{ll}^{(1)} \prod\limits_{i=1}^{N} P_{V_k}^{(11)} P^{(1)}(\delta_i \mid V_k), & \text{если} \quad 0 < L_{ll}^{(1)} < L_{ll}^{(2)}, \\ L_{ll}^{(1)} P_{V_k}^{(2)} \prod\limits_{i=1}^{N} P^{(2)}(\delta_i \mid V_k), & \text{если} \quad L_{ll}^{(1)} < L_{ll}^{(2)} \le 0 \ \text{ или } \ L_{ll}^{(1)} < 0 < L_{ll}^{(2)} \end{cases}.$$

Из (17), (18) следует, что доверительные интервалы вероятностей, фигурирующие в предложенных моделях субоптимальных коллективных решений, сужаются с ростом числа наблюдений n. Это позволяет доказать [38], что для любого β всегда найдется такое *конечное* число наблюдений n_0, что при оценке частот $P^*(V_k)$ и $P^*(\delta_i = m \mid V_k)$ по выборке объемом $n \ge n_0$ предложенные интервальные модели позволяют принимать однозначные коллективные решений в условиях противоречий частных решений экспертов.

Заметим также, что для оценки частот $P^*(V_k)$ и $P^*(\delta_i = m \mid V_k)$ вовсе не всегда необходимо проводить дополнительные эксперименты. Часто может быть достаточно имеющихся ретроспективных данных, например, историй болезней при формировании медицинского консилиума или кредитной историей банка в задаче скоринга.

Заключение. Предложенный подход к формированию коллективного решения о текущем состоянии объекта основан на интеграции частных решений группы независимых экспертов в условиях противоречий на основе байесовой стратегии. Отличительная особенность подхода состоит в том, что коллективное решение в условиях противоречий частных решений экспертов не использует эвристические процедуры и реализует формальный критерий – минимум среднего риска ошибки на множестве возможных ситуаций. На основе методов интервального анализа построена субоптимальная модель принятия коллективного решения, которая с заданной доверительной вероятностью обеспечивает критерий оптимальности.

О.А. Жуковська, Л.С. Файнзільберг

БАЙЄСОВА СТРАТЕГІЯ ПРИЙНЯТТЯ
КОЛЕКТИВНИХ РІШЕНЬ
ТА ЇЇ ІНТЕРВАЛЬНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ

Розвивається оригінальний підхід до формалізації процесу прийняття колективного рішення, заснований на інтеграції частних рішень групи незалежних експертів. Запропоновано математичні моделі колективних рішень в умовах ризику, що ґрунтуються на байєсовой стратегії. На основі методів інтервального аналізу побудовані субоптимальні моделі, що забезпечують з заданою довірчою ймовірністю мінумім середнього ризику колективного рішення на множині можливих ситуацій.

Ключовві слова: колективне рішення, експерт, середній ризик

O.A Zhukovskaya, L.S. Fainzilberg

BAYESIAN STRATEGY FOR GROUP DECISION MAKING
AND ITS INTERVAL GENERALIZATION

An original approach to formalize the process of group decision making based on the integration of private decisions of independent experts is developed. Mathematical models of collective solutions under risk conditions based on the Bayesian strategy are proposed. Using on the methods of interval analysis suboptimal models providing the minimum of the average risk of groupe solution on a set of possible situations with a given confidence probability are constructed.

Keywords: group decision making, expert, average risk

1. Вожаков А.В., Гитман М.Б., Столбов В.Ю., Елисеев А.С. Алгоритм принятия коллективных решений в рамках ситуационного центра промышленного предприятия // Прикладная математика и вопросы управления. 2015. № 2. С. 63–74.
2. Lu J., Zhang G., Ruan Da, Wu Fengjie Multi-Objective Group Decision Making. Methods, Software and Applications with Fuzzy Set Techniques // Series in Electrical and Computer Engineering. London: Imperial College Press, 2007. 387 p. DOI: https://doi.org/10.1142/p505.
3. Ho T.K., Hull J.J., Srihari S.N. Decision Combination in Multiple Classifier Systems//IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994. V.16. No. 1. P. 66–75. DOI: https://10.1109/34.273716
4. Kittler J., Roli F. (Eds.). Multiple Classifier Systems // Lecture Notes in Computer Science. 2000. No. 1857.
5. Рязанов В.В., Ткачев Ю.И. Восстановление зависимости на основе байесовской коррекции коллектива распознающих алгоритмов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Том 50. № 9. С. 1687-1696.
6. Файнзильберг Л.С. Байєсова схема принятия коллективных решений в условиях противоречий // Проблемы управления и информатики. 2002. №3. С.112-122.
7. Жуковская О.А., Файнзильберг Л.С. Интервальное обобщение байесовской модели принятия коллективного решения в конфликтных ситуациях // Кибернетика и системный анализ. 2005. №3. С. 133–144.
8. Hinsz V.B., Nickell G.S. Positive Reactions to Working in Groups in a Study of Group and Individual Goal Decision-Making. 2004. Group Dynamics: Theory, Research, and Practice. 2004. Vol. 8. No. 4. 253–264. http://dx.doi.org/10.1037/1089-2699.8.4.253
9. Hsu C.C., Standford B.A. The Delphi Technique: Making Sense of Consensus // Practical Assessment, Research & Evaluation. 2007. Vol. 12. No. 10. P. 1–8.
10. Yousuf M.I. Using Experts' Opinions through Delphi Technique // Practical Assessment Research & Evaluation. 2007. Vol. 12. No. 4. P. 1–8.
11. Sadi E.S. Computerized Argument Delphi Technique // IEEE Journals & Magazines. 2015. Vol. 3. P. 368–380. DOI: 10.1109/ACCESS.2015.2424703.
12. Lu L., Yuan Y.C., McLeod P.L. Twenty-Five Years of Hidden Profiles in Group Decision Making A Meta-Analysis // Personality and Social Psychology Review. 2012. Vol. 16. No. 1. P. 54–75. doi: 10.1177/1088868311417243.

13. Chen S.M. Extensions of the TOPSIS for Group Decision-making under Fuzzy Environment // Fuzzy Sets and Systems. 2000. No. 114. P.1–9.
14. Nasab F.G., Rostamy-Malkhalifeh M. Extension of TOPSIS for Group Decision-Making Based on the Type-2 Fuzzy Positive and Negative Ideal Solutions // International Journal Industrial Mathematics. 2010. Vol. 2. No. 3. P. 199–213.
15. Коваленко И.И., Швед А.В. Экспертные технологии принятия решений. Николаев: Илион, 2013. 216 с.
16. Zgurovsky M.Z., Totsenko V.G., Tsyganok V.V. Group Incomplete Paired Comparisons with Account of Expert Competence // Mathematical and Computer Modelling. 2004. Vol. 39. № 4(5). P. 349–361. DOI: 10.1016/S0895-7177(04)90511-0
17. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. Киев: Наукова думка, 2002. 381 с.
18. Dijkstra J., Assen M.A., Stokman F.N. Outcomes of Collective Decisions with Externalities Predicted // Journal of Theoretical Politics. 2008. No. 20. P. 415–442. DOI: 10.1177/0951629808093774.
19. Napel S., Widgran M. The Possibility of a Preference-Based Power Index // Journal of Theoretical Politics. 2005. Vol. 17. No. 3. P. 377–387.
20. Suchan C., Heidhues P. A Group Bargaining Solution // Mathematocal Social Sciences. – 2004. Vol. 48. Issue 1. P. 37–53.
21. Мащенко С.О. Индивидуально-оптимальные равновесия некооперативных игр в отношениях предпочтения // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 1. С. 171–179.
22. Зайченко Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. К.: Слово, 2008. 344 с.
23. Ashtiani B., Haghighirad F., Montazer G.A. Extension of Fuzzy TOPSIS Method based on Interval-valued Fuzzy Sets // Applied Soft Computing. 2009. No. 9. P. 457–461. Doi:10.1016/j.asoc.2008.05.005.
24. Boran F.E., Gen S., Kurt M., Akay D. A Multi-criteria Intuitionistic Fuzzy Group Decision Making for Supplier Selection with TOPSIS method // Expert System with Application. 2009. Vol. 36. No. 8. P.11363–11368. DOI 10.1007/s00170-012-4400-0.
25. Chen S.M., Lee L.W. Fuzzy Multiple Attributes Group Decision-making based on the Ranking Values and the Arithmetic Operations of Interval Type-2 Fuzzy Sets // Expert Systems with applications. 2010. No. 37. P. 824–833.
26. Grzegorzewski P. Distances between Intuitionistic Fuzzy Sets and/or Interval-valued Fuzzy Sets based on the Hausdorff metric // Fuzzy Set and Systems. 2004. No. 148. P. 319–328. https://doi.org/10.1016/j.fss.2003.08.005.
27. Hong D.H., Lee S. Some Algebraic Properties and a Distance Measure for Interval-valued Fuzzy Numbers // Information Sciences. 2002. No. 148. P. 1–10.
28. Zanakis S.H., Solomon A., Wishart N., Dublish D. Multi-Attribute Decision Making: A Simulation of Select Methods // European Journal of Operational Research. 1998. Vol.107. No. 3. P.507–529. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00147-1.
29. Lima Junior F.R., Osiro L., Carpinettia L.C.R. A Comparison between Fuzzy AHP and Fuzzy TOPSIS Methods to Supplier Selection Applied // Soft Computing. 2014. No. 21. P. 194–209. http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2014.03.014.
30. Asan G., Sanver R. Another Characterization of the Majority Rule // Economics Letters. 2002. Vol. 75. No.3. P. 409–413
31. Brams S., Fishburn P. Voting Procedures // In Handbook of Social Choice and Welfare. –Amsterdam: Elsevier, 2002. – P. 173–236

32. Conitzer V., Sandholm T. Common Voting Rules as Maximum Likelihood Estimators // Proceedings of the 21st Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-05). 2005. P. 145–152.
33. Dowding K., Van Hees M. In Praise of Manipulation // British Journal of Political Science. 2007. Vol. 38. No.1. P. 1–15. DOI: 10.1017/S000712340800001X
34. Saari D. Mathematical Structure of Voting Paradoxes: II. Positional Voting // Economic Theory. 2000. Vol. 15. No. 1. – P.55–102.
35. Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004. 204 с.
36. Горбань І.І. Теорія ймовірності і математична статистика для наукових працівників та інженерів. К., ІПММС НАН України, 2003. 244 с.
37. Жуковська О.А. Основи інтервального аналізу. Навч. посіб. К. Освіта України. 2009. 136 с.
38. Жуковська О.А., Файнзільберг Л.С. Математичні моделі прийняття колективних рішень. Київ: Освіта України, 2018. 160 с.

Получено 11.10.2018