

УДК 621.317.755

Л.С. Файнзильберг

**Восстановление эталона циклических сигналов на основе использования хаусдорфовой метрики в фазовом пространстве координат**

**Ключевые слова:** Циклический сигнал, хаусдорфова метрика, фазовое пространство

Повторяющиеся во времени процессы часто протекают в технических и биологических системах. Такие процессы порождают специфические сигналы, которые в научной литературе принято называть циклическими [1] или квазипериодическими [2]. Типичными примерами циклических сигналов являются электрокардиограмма (ЭКГ), реограмма, магнитокардиограмма и многие другие физиологические сигналы, отражающие циклический характер работы системы кровообращения живого организма.

Известно, что существующие компьютерные системы анализа и интерпретации циклических сигналов, в частности, ЭКГ, все еще не обеспечивают требуемую достоверность результатов [3]. Согласно [4], это в первую очередь вызвано ошибками, которые возникают при измерении параметров (диагностических признаков) при обработке реальных сигналов во временной области. Один из альтернативных методов анализа таких сигналов, предложенный в [5] и получивший развитие в целом ряде других работ, в частности, в [6-8], предполагает отображение и обработку сигнала в фазовом пространстве координат.

В настоящей статье предлагается модель порождения циклических сигналов и на основе этой модели исследуется новый метод восстановления эталона циклического сигнала по искаженной реализации, наблюдаемой в фазовом пространстве.

**Постановка задачи.** Пусть наблюдаемый сигнал  $y(t) = \Phi[\hat{y}_0(t), \zeta(t)]$  является результатом искажения периодического процесса  $\hat{y}_0(t)$  случайным возмущением  $\zeta(t)$ , где  $\Phi(\cdot)$  - некоторая функция. Назовем эталонным циклом  $y_0(t)$  - часть ненаблюдаемой функции  $\hat{y}_0(t)$  на любом из ее периодов  $T_0$ . Ставится задача оценить эталон  $y_0(t)$  по реализации  $y(t)$ , наблюдаемой на отрезке  $[0, T]$ ,  $T \gg T_0$ .

**Стохастическая модель порождения циклических сигналов.** Прежде чем переходить к решению поставленной задачи, рассмотрим одну из возможных моделей порождения  $y(t)$  по эталону  $\hat{y}_0(t)$ . Будем считать, что эталон  $y_0(t)$  может быть представлен в виде функции, кусочно-заданной на интервале  $[0, T_0)$  отдельными фрагментами

$$y_0(t) = \begin{cases} y_0^{(1)}(t), & 0 \leq t < t_0^{(1)}, \\ \dots \\ y_0^{(i)}(t), & t_0^{(i-1)} \leq t < t_0^{(i)}, \\ \dots \\ y_0^{(K_F)}(t), & t_0^{(K_F-1)} \leq t < t_0^{(K_F)} = T_0, \end{cases} \quad (1)$$

полагая, что число таких фрагментов  $K_F \geq 2$ . Применительно к ЭКГ такие фрагменты соответствуют стадиям процесса возбуждения отдельных участков сердца -

деполяризации предсердий (волне  $P$ ), возбуждению (комплексу  $QRS$ ) и реполяризации (волне  $T$ ) желудочков [1].

Представим наблюдаемый сигнал  $y(t)$  в виде последовательности искаженных эталонов (1), предполагая, что на каждом  $m$ -м цикле такой последовательности ( $m=1,2,\dots$ ) отдельные фрагменты эталона  $y_0^{(i)}(t)$  независимо один от другого линейно растягиваются (сжимаются) по времени, а сама функция  $y_0(t)$  линейно растягивается (сжимается) по амплитуде. Иными словами, предполагается, что процесс порождения  $i$ -го фрагмента ( $i=1,\dots, K_F$ ) каждого  $m$ -го цикла ( $m=1,2,\dots$ ) осуществляется на основе операторного преобразования

$$y_m^{(i)}(t) = a_m y_0^{(i)}\left(\frac{t - \tau_m^{(i)}}{b_m^{(i)}}\right), \quad (2)$$

где  $a_m, b_m^{(i)}$  - соответственно параметры линейного растяжения (сжатия) по амплитуде и времени, а  $\tau_m^{(i)}$  - сдвиг по времени. Для обеспечения непрерывности порождаемого сигнала предполагается, что  $y_0(0) = 0$ . Последнее требование всегда можно обеспечить, выполнив предварительную нормировку эталона  $\tilde{y}_0(t) = y_0(t) - y_0(0)$ .

Пусть в пределах каждого  $m$ -го цикла параметр  $a_m$  принимает фиксированное значение

$$a_m = 1 + \xi_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $\xi_m$  - последовательность реализаций независимых случайных величин, которые с нулевым математическим ожиданием  $M\{\xi\} = 0$  распределены на интервале  $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , ограниченном фиксированным числом  $\varepsilon_0 \in [0, 1)$ .

Предположим также, что параметр  $b_m^{(i)}$  принимает фиксированное значение в процессе порождения каждого  $i$ -го фрагмента  $m$ -го цикла

$$b_m^{(i)} = 1 + \delta_m^{(i)}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, K_F, \quad (4)$$

где  $\delta_m^{(i)}$  - последовательность реализаций независимых случайных величин, которые с нулевым математическим ожиданием  $M\{\delta\} = 0$  распределены на интервалах  $[-\Delta_0^{(i)}, \Delta_0^{(i)}]$ , ограниченными фиксированными числами  $\Delta_0^{(i)} \in [0, 1)$ .

При таких предположениях продолжительность  $i$ -го фрагмента  $m$ -го цикла сигнала  $y(t)$  связана с продолжительностью  $\Delta T_0^{(i)} = t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)}$  соответствующего фрагмента эталона соотношением

$$\Delta T_m^{(i)} = (t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)})(1 + \delta_m^{(i)}).$$

Следовательно, общая продолжительность  $m$ -го цикла порождаемого сигнала  $y(t)$  определяется выражением

$$T_m = T_0 + \sum_{i=1}^{K_F} (t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)}) \delta_m^{(i)},$$

началу  $m$ -го цикла соответствует момент времени

$$t_m = (m-1)T_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{K_F} (t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)}) \delta_j^{(i)},$$

а началу  $i$ -го фрагмента  $m$ -го цикла – момент времени

$$t_m^{(i-1)} = (m-1)T_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{K_F} (t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)}) \delta_j^{(i)} + \sum_{l=1}^{i-1} (t_0^{(l)} - t_0^{(l-1)}) (1 + \delta_m^{(l)}). \quad (5)$$

Применим к  $i$ -му фрагменту эталона  $y_0(t)$  операторное преобразование (2), положив параметр сдвига  $\tau_m^{(i)} = t_m^{(i-1)} - (1 + \delta_m^{(i)})t_0^{(i-1)}$ . Тогда из (2) с учетом соотношений (3)-(5) следует, что процесс порождения  $i$ -го фрагмента на  $m$ -м цикле можно представить в виде

$$y_m^{(i)}(t) = (1 + \xi_m) y_0^{(i)}(\theta), \quad m = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, K_F, \quad (6)$$

где

$$\theta = \frac{t - (m-1)T_0 + (1 + \delta_m^{(i)})t_0^{(i-1)} - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{K_F} (t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)}) \delta_j^{(i)} - \sum_{l=1}^{i-1} (t_0^{(l)} - t_0^{(l-1)}) (1 + \delta_m^{(l)})}{1 + \delta_m^{(i)}}. \quad (7)$$

Предложенная модель, которая описывает *неравномерные* по времени искажения эталона  $y_0(t)$ , более пригодна для описания реальных циклических сигналов, в частности ЭКГ, нежели ее упрощенный вариант

$$y_m^{(i)} = (1 + \xi_m) y_0^{(i)} \left[ (t - (m-1)T_0 - T_0 \sum_{j=1}^{m-1} \delta_j) (1 + \delta_m)^{-1} \right] \quad m = 1, 2, \dots,$$

полученный в предположении, что фигурирующий в (7) случайный параметр  $\delta$  зависит только от номера  $m$  цикла, но не зависит от номера  $i$  фрагмента.

Нетрудно показать, что стохастическая модель (6),(7) является прямым обобщением известных моделей строго периодического и почти периодического процессов. Действительно, положив в (7)  $\delta_j^{(i)} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, K_F$ , модель (6) можно представить в виде соотношения

$$\left| y_m[t] - y_0[t - (m-1)T_0] \right| \leq \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

которое описывает почти периодический процесс [9], а при дополнительном условии  $\varepsilon_0 = 0$ , сводится к модели строго периодической функции  $y[t - (m-1)T_0] = y_0[t]$ .

Предложенная модель легко может быть обобщена для описания процесса порождения более сложных циклических сигналов, в частности, ЭКГ с изменяющейся морфологией отдельных циклов (экстрасистолами) [10]. Для этого достаточно ввести в рассмотрение не один, а  $G > 1$  эталонов  $y_{01}(t), \dots, y_{0G}(t)$ , и предположить, что каждый  $m$ -й цикл порождается путем аналогичных искажений одного из этих эталонов, выбираемых

случайным образом в соответствии с вероятностями  $P_g, \sum_{g=1}^G P_g = 1$ .

**Генератор циклических последовательностей.** Рассмотрим достаточно простой алгоритм генерации дискретных циклических последовательностей по эталонам. Пусть каждый из  $G > 1$  эталонов  $y_{0g}(t)$ , ( $g = 1, \dots, G$ ) представлен конечным числом  $N_g$  дискретных значений  $y_{0g}[1], \dots, y_{0g}[N_g]$ , зафиксированных с постоянным шагом квантования по времени. Зададим общее число  $K_F^{(g)}$  фрагментов каждого эталона и

номера точек  $N_g^{(i)} \in [1, N_g], i=1, \dots, K_F^{(g)} - 1$ , которые определяют границы  $i$ -го и  $i+1$ -го фрагмента  $g$ -го эталона.

При таких исходных данных процедура генерации циклической последовательности сводится к следующим шагам.

Шаг 1. Задаем общее число  $M$  циклов генерируемой последовательности.

Шаг 2. Определяем число  $M_g$  циклов, порождаемых  $g$ -м эталоном, по формуле  $M_g = R[P_g M]$ , где здесь и далее  $R[\eta]$  - операция округления до целого числа  $\eta$ .

Шаг 3. Выбираем номер  $g_m$  эталона, порождающего  $m$ -й цикл ( $m=1, \dots, M$ ), по значению реализации  $\lambda_m$  целочисленной случайной величины  $\lambda$ , распределенной на интервале  $[1, G]$  т.е.  $g_m = \lambda_m$ .

Шаг 4. Если  $M_g = 0$ , то повторяем шаг 3.

Шаг 5. Определяем число точек  $i$ -го фрагмента  $m$ -го цикла по формуле

$$N_m^{(i)} = R[(N_g^{(i)} - N_g^{(i-1)})(1 + \delta_m^{(i)})],$$

где  $\delta_m^{(i)}$  - реализация случайной величины  $\delta$ , которая с нулевым математическим ожиданием распределена на интервале  $[-\delta_0, \delta_0]$ ,  $\delta_0 \in [0, 1)$ .

Шаг 6. По дискретным значениям  $i$ -го фрагмента  $g$ -го эталона в  $N_g^{(i)} - N_g^{(i-1)}$  узлах любым из методов интерполяции вычисляем значения генерируемой последовательности в  $N_m^{(i)}$  точках.

Шаг 7. Модифицируем каждое вычисленное значение  $y$  на основе мультипликативной процедуры  $\tilde{y} = y(1 + \xi_m)$ , где  $\xi_m$  - реализация случайной величины  $\xi$ , которая с нулевым математическим ожиданием распределена на интервале  $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 \in [0, 1)$ .

Шаг 8. Если  $i < K_F^{(g)}$ , то возвращаемся к шагу 5.

Шаг 9. Присваиваем  $M_g := M_g - 1$ .

Шаг 10. Если  $m < M$ , то возвращаемся к шагу 3.

Результаты моделирования подтверждают эффективность рассмотренного алгоритма для имитации реальных циклических сигналов (рис. 1).



Рис. 1. ЭКГ- сигнал, порожденный моделью (6): по одному эталону (а); по двум эталонам (б)

**Метод оценки эталона по искаженной реализации.** Пусть циклический сигнал (6) представлен последовательностью  $Y^{(K)} = \{y[k], k=1, \dots, K\}$  дискретных значений,

наблюдаемых в течение  $M > 2$  циклов. Предположим, что для каждого  $k$ -го значения имеется оценка производной  $\dot{y}[k]$ . Выполнив нормировку

$$y_k^* = \frac{y[k] - \min_{1 \leq k \leq K} y[k]}{\max_{1 \leq k \leq K} y[k] - \min_{1 \leq k \leq K} y[k]} \quad \forall k = 1, \dots, K,$$

$$\dot{y}_k^* = \frac{\dot{y}[k] - \min_{1 \leq k \leq K} \dot{y}[k]}{\max_{1 \leq k \leq K} \dot{y}[k] - \min_{1 \leq k \leq K} \dot{y}[k]} \quad \forall k = 1, \dots, K,$$

сформируем множество  $Q = \{z_k = (y_k^*, \dot{y}_k^*), k = 1, \dots, K\}$  точек, принадлежащих траектории наблюдаемого сигнала в двумерном нормированном фазовом пространстве  $y - \dot{y}$ .

Пусть нам известны номера точек  $k = k_m, m = 1, \dots, M$ , соответствующие началам каждого  $m$ -го цикла (алгоритм определения номеров  $k_m$  в данной статье не рассматривается). Тогда множество  $Q$  можно разбить на  $M$  подмножеств  $Q_1, \dots, Q_M$  нормированных векторов  $z_k$ , концы которых лежат на фазовых траекториях отдельных циклов.

Будем оценивать расстояние между любыми двумя подмножествами  $Q_i \subset Q$  и  $Q_j \subset Q, i \neq j$  хаусдорфовой метрикой [11]

$$R_H(Q_i, Q_j) = \max \left\{ \max_{z_j \in Q_j} \min_{z_i \in Q_i} \rho(z_i, z_j), \max_{z_i \in Q_i} \min_{z_j \in Q_j} \rho(z_i, z_j) \right\}, \quad (8)$$

где  $\rho(z_i, z_j) = \|z_i - z_j\| = \sqrt{(y_i^* - y_j^*)^2 + (\dot{y}_i^* - \dot{y}_j^*)^2}$  - евклидово расстояние между точками  $z_i$  и  $z_j$ .

Назовем опорным циклом подмножество  $Q_0 \subset Q$  векторов  $z_k$ , которое имеет минимальное суммарное расстояние (8) с остальными  $M - 1$  подмножествами

$$Q_0 = \arg \min_{\substack{1 \leq j \leq M \\ j \neq i}} \sum_{i=1}^M R_H(Q_i, Q_j), \quad (9)$$

и будем оценивать эталон (средний цикл) путем усреднения точек различных траекторий, расположенных в окрестности точек  $z_1, \dots, z_{K_0}$  опорного цикла.

С этой целью проведем селекцию траекторий, подлежащих усреднению, определив подмножество  $\Omega_0 \subseteq Q$  тех траекторий, хаусдорфово расстояние которых до опорной меньше заданной величины  $\delta_H$ , т.е.  $\Omega_0 = \{Q_j : R_H(Q_j, Q_0) < \delta_H\}$ . Для улучшения оценки представим опорный цикл  $Q_0$  и остальные циклы  $Q_j \in \Omega_0$  последовательно расширенных векторов  $u_k = (z_k, \tau_k)$ , которые, помимо нормированных фазовых координат  $z_k = (y_k^*, \dot{y}_k^*)$ , содержат дополнительную компоненту  $\tau_k$ . Величина  $\tau_k$  вычисляется в каждой  $l$ -й точке  $j$ -й траектории по формуле

$$\tau_l^{(j)} = \frac{l - k_m^{(j)}}{K_j - 1}, \quad l = k_m^{(j)}, \dots, k_m^{(j)} + K_j - 1; \quad j = 1, \dots, M,$$

где  $k_m^{(j)}$  - номер первой точки  $j$ -й траектории, состоящей из  $K_j$  точек.

Введение дополнительной компоненты  $\tau_k$  позволяет при усреднении точек оценивать их близость не только с точки зрения значений фазовых координат  $y_k^*, \dot{y}_k^*$ , но

и с точки зрения синхронности во времени. Для этого предлагается определять евклидово расстояние  $\rho_\tau(u_0, u_j) = \|u_0 - u_j\| = \sqrt{(y_0^* - y_j^*)^2 + (\dot{y}_0^* - \dot{y}_j^*)^2 + (\tau_0 - \tau_j)^2}$  между расширенными векторами  $u_0 = (z_0, \tau_0)$  опорной траектории и расширенными векторами  $u_j = (z_j, \tau_j)$  остальных траекторий  $Q_j \in \Omega_0$ , а для оценки последовательности точек  $\hat{z}_i, i = 1, \dots, K_0$  среднего цикла воспользоваться соотношением

$$\hat{z}_i = \frac{z_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{M_0} z_{ij}^{\min}}{M_0 + 1}, \quad i = 1, \dots, K_0, \quad (10)$$

где  $z_{ij}^{\min}$  - точка, лежащая на  $j$ -той траектории (не являющейся опорной), которая находится на минимальном евклидовом расстоянии  $\rho_\tau$  от точки опорной траектории  $z_0^{(i)} \in Q_0$ :

$$z_{ij}^{\min} = \operatorname{argmin}_{k_m^{(j)} \leq l \leq k_m^{(j)} + K_j - 1} \rho_\tau(u_0^{(i)}, u_j^{(l)}), \quad i = 1, \dots, K_0.$$

Последовательность векторов  $\hat{z}_i = (\hat{y}_i, \hat{\tau}_i), i = 1, \dots, K_0$ , вычисленная согласно (10), дает оценку ненаблюдаемого эталона в фазовом пространстве, а соответствующая последовательность  $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{K_0}$  - оценку эталонного цикла во временной области (рис. 2).

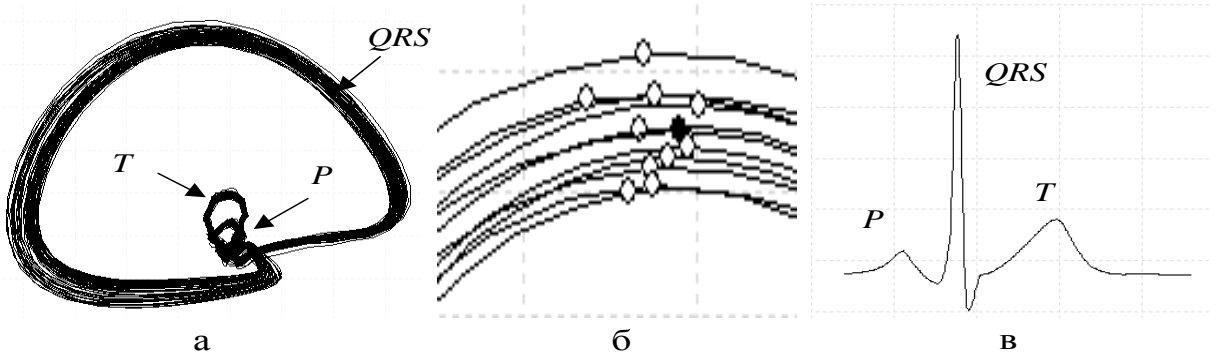


Рис.2. Иллюстрация к алгоритму оценки эталона (на примере ЭКГ) фазовые траектории (а); фрагменты траекторий (б); эталонный цикл (в)

**Модельный пример.** Пусть эталон  $y_0(t)$  имеет форму равнобедренного треугольника (рис. 3 а), заданного двумя фрагментами в виде линейных функций

$$y_0(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 3 \\ 6 - t, & 3 \leq t < 6 \end{cases}. \quad (11)$$

Предположим, что мы наблюдаем два цикла сигнала, порожденного в соответствии с моделью (6) по эталону (11), причем на 1-м цикле параметры растяжения по времени приняли значения  $b_1^{(1)} = 2/3$  и  $b_1^{(2)} = 2$ , а на 2-м цикле -  $b_2^{(1)} = 2$  и  $b_2^{(2)} = 2/3$ . В результате наблюдаемый сигнал будет описывать функция

$$y(t) = \begin{cases} 3/2t, & 0 \leq t < 2 \\ 4 - t/2, & 2 \leq t < 8 \\ t/2 - 4, & 8 \leq t < 14 \\ 24 - 3/2t, & 14 \leq t < 16 \end{cases}, \quad (12)$$

график которой показан на рис. 3 б).

Совместим наблюдаемые циклы на интервале  $[0,8]$  (рис. 3 в) и усредним их во временной области. Легко видеть, что при этом будет получена оценка

$$\hat{y}_0(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ 2, & 2 \leq t < 6, \\ 8-t, & 8 \leq t < 8, \end{cases}$$

которая по форме не соответствует эталону (рис 3 г). В то же время, усреднение этих же циклов в фазовом пространстве координат (рис. 3 д) с последующим переходом во временную область (рис. 3 е) позволяет точно восстановить эталон (11).

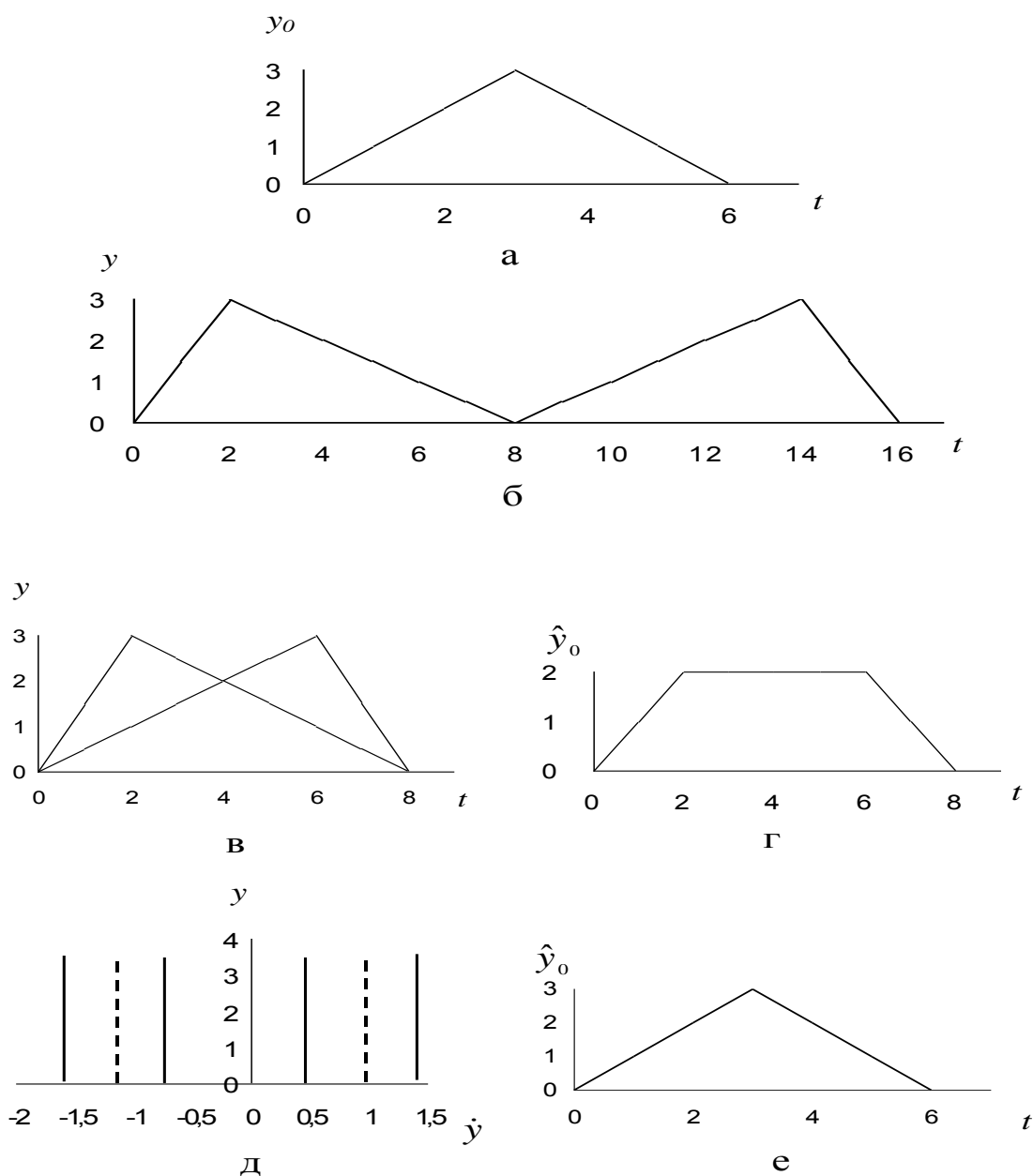


Рис.3. Иллюстрация к модельному примеру эталон (а); наблюдаемый сигнал (б); совмещенные во времени циклы (в); фазовая траектория (г); оценка эталона при усреднении во временной области (д) и в фазовом пространстве (е)

**Практические результаты.** Предложенный метод оценки эталонного цикла нашел практическое применение при разработке новых компьютерных систем обработки ЭКГ в фазовом пространстве [12-14]. Медицинские испытания систем проводились Украинском НИИ кардиологии имени Н.Д. Стражеско.

При испытаниях был установлен ряд новых диагностических признаков ЭКГ в фазовом пространстве, которые позволили диагностировать больных ревматоидным артритом даже в тех случаях, когда их ЭКГ признавались неизменными при традиционном анализе во временной области [12]. Предложенный метод позволяет выявить тонкие изменения морфологии циклов ЭКГ и тем самым повысить чувствительность и специфичность диагностики при массовых донозологических обследованиях населения. Он может быть использован для оценки функционального состояния операторов, работающих в условиях повышенного риска (водители транспортных средств, авиадиспетчеры, пилоты и т.п.) [13], а также для изучения влияния параметров внешней среды на ЭКГ здорового человека [14].

**Выводы.** Предложена стохастическая модель (6) процесса порождения циклических сигналов, которая является прямым обобщением известных в математике моделей периодической и почти периодической функций. Показано, что эта модель легко может быть обобщена на случай порождения циклических сигналов с изменяющейся морфологией отдельных циклов.

Несмотря на то, что предложенная модель основана на линейных операциях, которым подвергаются фрагменты эталона (1), эта модель описывает *неравномерные* во времени искажения отдельных циклов наблюдаемого сигнала, что характерно для многих реальных циклических сигналов, в частности ЭКГ.

Показано, что можно получить приемлемую оценку ненаблюдаемого эталона по реализации циклического сигнала на основе конструктивного алгоритма усреднения траекторий отдельных циклов в фазовом пространстве координат с использованием хаусдорфовой метрики.

Использование предложенного метода в компьютерных системах обработки ЭКГ позволило повысить чувствительность и специфичность ЭКГ диагностики.

## Литература

1. *Kanjilal P. P., Bhattacharya J., Saha G.* Robust method for periodicity detection and characterisation of irregular cyclical series in terms of embedded periodic components // *Phys. Rev.*- 1999.- Vol. 59.- P. 4013–4025.
2. *Whittaker E. T., Watson, G. N.* Quasi-Periodic Functions // *A Course in Modern Analysis.* – Cambridge (England): Cambridge University Press, 1990 - P. 445-447.
3. *Беркутов А.М., Гуржин С.Г., Дунаев А.А., Прошин Е.М.* Повышение эффективности регистрации формы электрокардиосигнала корреляционной обработкой в цифровой осциллографии // *Биомедицинские технологии и радиоэлектроника.* - 2002, № 7.- С. 4-13.
4. *Валужис А.К., Рашимас А.П.* Статистический алгоритм структурного анализа электрокардиосигнала. – *Кибернетика.* - 1979, № 3.- С. 91-95.
5. *Амосов Н.М., Агапов Б.Т., Паничкин Ю.В.* Исследование сократительной функции миокарда методом фазовых координат // *Докалады АН СССР.*- 1972, т. 202.- № 1.- С. 245-247.
6. *Фрумин Л.Л., Штарк М.Б.* О фазовом портрете электрокардиограммы // *Автоматрия.* – 1993, № 2.- С. 51-54.
7. *Fainzilberg L.S. Potapova T.P.* Computer Analysis and Recognition of Cognitive Phase Space Electro-Cardio Graphic Image // *Proc. of 6 th Internnatioanl Conf. On Computer*



- analysis of Images and Patterns (CAIP'95).- Prague (Czech Republic).- 1995. - P. 668-673.
8. *Fainzilberg L.S.* Heart Functional State Diagnostic Using Pattern Recognition of Phase Space ECG-Images.- Proceeding of The 6th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing (EUFIT '98, Aachen, Germany, September 7 - 10, 1998).- Nr: B-27, Vol. 3.- P. 1878-1882.
  9. *Лана В.Г.* Математические основы кибернетики. - К.: Вища школа, 1974.- 452 с.
  10. *Мурашко В.В., Струтинский А.В.* Электрокардиография.- М.: Медицина, 1991.- 288 с.
  11. *Скворцов В.А.* Примеры метрических пространств. - М.: МЦНМО, 2002.- 24 с.
  12. *Файнзильберг Л.С., Клубова А.Ф., Стаднюк Л.А., Чайковский И.А., Лерхе Дитмар.* Новый метод анализа ЭКГ больных ревматоидным артритом // Український ревматологічний журнал, 2001, № 2, с.48-51.
  13. *Файнзильберг Л.С.* Информационная технология для диагностики функционального состояния оператора // УСИМ. - 1998, - № 4. - С. 40-45.
  14. *Вишневский В.В., Рагульская М.В., Файнзильберг Л.С.* Влияние солнечной активности на морфологические параметры ЭКГ сердца здорового человека // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника, 2003, № 3. - С. 3-12.