Проблемы управления и информатике, 2002, n 3, с. 112-122.

БАЙЕСОВА СХЕМА ПРИНЯТИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОРЕЧИЙ

Л.С.Файнзильберг

Введение. Различные сферы профессиональной деятельности человека связаны с принятием решений, которые сводятся к выбору оптимального варианта поведения из множества альтернатив [1,2]. Довольно часто такой выбор опирается на информацию, которую лицо, принимающее решение, получает в виде рекомендаций от коллектива экспертов [3-7].

Целый ряд прикладных задач, например, задач медицинской и технической диагностики, также сводится к принятию решения: необходимо определить принадлежность состояния объекта исследования к одному из нескольких заранее определенных классов (диагнозов) [8]. В простейших случаях достаточно сделать выбор между двумя возможными состояниями, например «болен» - «здоров», «исправен - неисправен». В других случаях число возможных диагнозов больше двух.

При решении таких задач используются методы распознавания образов, позволяющие автоматизировать процесс диагностики. С этой целью состояние объекта описывается совокупностью некоторых параметров (признаков) и строится алгоритм распознавания, который после соответствующей настройки (обучения) обеспечивает классификацию текущего состояния объекта. Обычно эффективность таких систем оценивается вероятностью ошибочной классификации.

Для повышения эффективности систем распознавания в последнее время внимание специалистов привлекают так называемые коллективные (комбинированные) классификаторы [9,10]. Их суть состоит в том, что окончательное решение принимается на основе «интеграции» частных решений, которые принимают отдельные классификаторы.

Существуют различные подходы к интеграции частных решений. В одних случаях предлагается использовать метод голосования (*majority vote method*) [11,12] или ранжирования (*label ranking method*) [13, 14]. В других - использовать схемы, основанные на усреднении или линейной комбинации апостериорных вероятностей, которые оцениваются отдельными классификаторами [15,16], либо использовать алгоритмы нечетких правил (*fuzzy rules*) [17]. Предлагается также проводить независимое обучение комбинированного классификатора, рассматривая частные решения как новые комплексные признаки [18,19]. Развиваются также подходы, основанные на выделении в пространстве наблюдений локальных областей, в каждой из которых только один из частных классификаторов «компетентен» принимать решение [20].

Все эти работы имеют несомненный теоретический интерес и, как показано в [21], позволяют обосновать выбор той или иной схемы интеграции, если известны алгоритмы принятия частных решений и характеристики признаков, которые используют отдельные классификаторы.

В то же время на практике, как отмечено в [1], приходится принимать решения и в тех случаях, когда рассматриваемая проблема слабо структурирована, а формализации поддаются лишь отдельные фрагменты общей постановки. Довольно часто эксперты при анализе ситуаций используют не количественные, а качественные признаки [22], а сами решения принимают на основе эвристических алгоритмов либо просто полагаются на свой предшествующий опыт и интуицию.

Разумеется в этих практически важных случаях также требуется обоснованный подход к интеграции частных решений экспертов. Например, какое окончательное решение должно быть принято, если в результате независимого обследования часть специалистов (экспертов) признала пациента здоровым, а другая часть – больным?

Можно привести и другие не менее актуальные примеры необходимости принятия коллективных решений в условиях противоречий при ограниченной априорной информации о частных решениях экспертов.

В настоящей статье развивается один из возможных подходов к решению таких задач.

Постановка задачи. Пусть некоторый объект Z находится в одном из M возможных состояний (классов) V_1 ,...,V_M с известными априорными вероятностями $P(V_1),...,P(V_M)$, $\sum_{j=1}^{M} P(V_j) = 1$. Ясно, что если не располагать какой либо дополнительной информацией, то состояние Z всегда следует относить к классу, имеющему наибольшую априорную вероятность. В этом случае величина

$$P_0 = 1 - \max\{P(V_1),...,P(V_M)\}, \quad (1)$$

определяет минимальную вероятность ошибочной классификации.

Предположим теперь, что имеется N экспертов (алгоритмов) $A_1,\ldots,$ A_N, которые на основании дополнительной информации независимо один от другого принимают решения $\delta_i(Z)$ о состоянии объекта Z в виде индикаторных функций

$$\delta_i(Z) = k, \text{ если } A_i \text{ решает в пользу } V_k, \quad i = 1,\ldots,N, \ k = 1,..M. \qquad (2)$$

Будем характеризовать «квалификации» экспертов вероятностями $P(A_i)$ ошибочной классификации, которые считаются известными для всех N экспертов на основании предыдущего опыта. При этом, естественно, допустить, что эти вероятности удовлетворяют условиям

$$P(A_i) < P_0 \text{ для всех } i = 1,\ldots, N \qquad (3)$$

Ставится задача построения коллективного решающего правила, основанного на частных решениях экспертов, которое минимизирует среднюю вероятность ошибочной классификации.

Решающее правило 1. Рассмотрим вначале простейший случай, когда число экспертов N=2 и число возможных классов M=2. В этом случае возможны четыре комбинации частных решений экспертов:

$$\begin{aligned} S_{11}&: \quad \delta_1(Z) = 1,\ \delta_2(Z) = 1; \\ S_{12}&: \quad \delta_1(Z) = 1,\ \delta_2(Z) = 2; \\ S_{21}&: \quad \delta_1(Z) = 2,\ \delta_2(Z) = 1; \\ S_{22}&: \quad \delta_1(Z) = 2,\ \delta_2(Z) = 2. \end{aligned}$$

Как видно в ситуациях S_{12} и S_{21} решения экспертов противоречивы. Возникает естественный вопрос: какое решение следует принимать, чтобы минимизировать вероятность ошибочной классификации?

На первый взгляд может показаться, что в условиях противоречий следует принимать то решение, которое принял более «квалифицированный» эксперт. В то же время оказывается, что в общем случае такой подход неправомерен.

Для того, чтобы показать это, рассмотрим условные (апостериорные) вероятности $P(V_1/S_{12})$ и $P(V_2/S_{12})$ классов в ситуации S_{12}. При этом для минимизации средней вероятности ошибочной классификации будем принимать окончательное решение в пользу класса V_1, если

$$P(V_1 / S_{12}) > P(V_2 / S_{12}), \quad (4)$$

и решение в пользу V_2 в противном случае.

По формуле Байеса имеем

$$P(V_1 / S_{12}) = \frac{P(V_1)P(S_{12} / V_1)}{P(S_{12})},$$

$$P(V_2 / S_{12}) = \frac{P(V_2)P(S_{12} / V_2)}{P(S_{12})}.$$

Очевидно, что неравенство (4) имеет место в том и только в том случае , когда

$$P(V_1)P(S_{12} / V_1) > P(V_2)P(S_{12} / V_2). \quad (5)$$

По определению условная вероятность $P(S_{12} / V_1)$ есть ни что иное как вероятность того, что в ситуации, когда имеет место класс V_1, эксперт A_2 принял правильное решение, а эксперт A_1 ошибся. Поскольку мы предполагаем, что решения экспертов независимы, то по формуле произведения вероятностей

$$P(S_{12}/V_1) = [1-P(A_1)]P(A_2). \quad (6)$$

Аналогичным образом

$$P(S_{12}/V_2) = P(A_1)[1-P(A_2)]. \quad (7)$$

Неравенство (5) с учетом (6), (7), можно представить в виде:

$$P(V_1)[1- P(A_1) P(A_2) > P(V_2) P(A_1) [1-P(A_2)]. \quad (8)$$

Из (8) вытекает, что в ситуации S_{12}, когда решения экспертов противоречивы, объект Z следует относить к классу V_1 в том и только том случае, когда

$$P(A_2) > \frac{\lambda P(A_1)}{1-P(A_1)(1-\lambda)}, \quad (9)$$

где $\lambda = P(V_2)/P(V_1)$ – отношение априорных вероятностей классов.

Если же выполняется соотношение

$$P(A_2) < \frac{\lambda P(A_1)}{1 - P(A_1)(1-\lambda)}, \qquad (10)$$

то в ситуации S_{12} объект Z следует относить к классу V_2

Для иллюстрации на рис. 1 показаны границы областей решений, построенные для ситуации S_{12} согласно условиям (9), (10) при различных значениях λ. Область решения в пользу класса V_1 расположена выше соответствующей границы, а решений в пользу класса V_2 – ниже соответствующей границы.

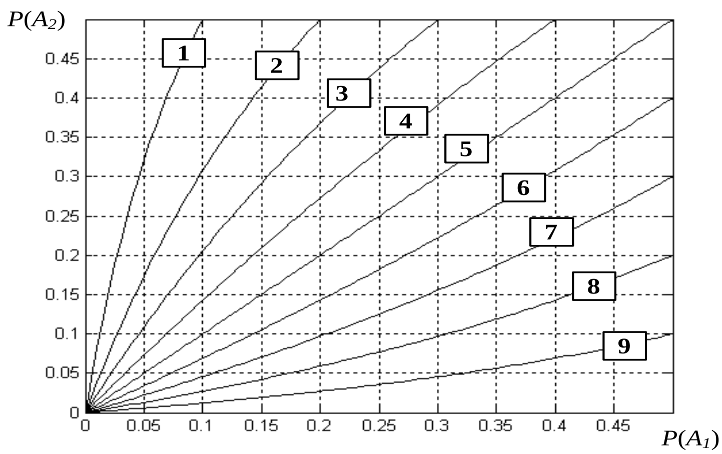

Рис. 1. Области решений для ситуации S_{12}

1: $\lambda = 9$; 2: $\lambda = 4$; 3: $\lambda = 2.33$; 4: $\lambda = 1.5$; 5: $\lambda = 1$; 6: $\lambda = 0.67$; 7: $\lambda = 0.43$; 8: $\lambda = 0.25$; 9: $\lambda = 0.11$.

Аналогичным образом легко показать, что в ситуации S_{21} решение в пользу класса V_1 следует принимать в том случае, когда

$$P(A_1) > \frac{\lambda P(A_2)}{1 - P(A_2)(1-\lambda)}, \qquad (11)$$

а решение в пользу класса V_2, когда

$$P(A_1) < \frac{\lambda P(A_2)}{1 - P(A_2)(1-\lambda)}. \qquad (12)$$

Заметим, что из (9)-(12) непосредственно следует, что только при равновероятных классах, когда $\lambda = 1$, окончательное решение совпадает с решением того из экспертов, который имеет меньшую вероятность ошибки.

В остальных же случаях, когда $\lambda \neq 1$, т.е. $P(V_1) \neq P(V_2)$ окончательное решение определяется не только соотношением вероятностей ошибок экспертов, но и соотношением априорных вероятностей классов. При этом окончательное решение может не совпадать с решением более «квалифицированного» эксперта.

Поскольку примеры часто бывают более убедительными, чем формальные рассуждения, поясним сказанное на модельном примере.

.

Модельный пример. Пусть $P(V_1)$=0.3, $P(V_2)$=0.7, а значит λ. = 2.33. Пусть далее известно, что первый эксперт ошибается в 5% случаев, т.е. $P(A_1)$=0.05, а второй - в 8% случаев, т.е. $P(A_2)$=0.08. Предположим, что эксперт A_1 отнес объект к классу V_1, а эксперт A_2 - к классу V_2, т.е. мы имеем ситуацию S_{12} противоречивых решений. Заметим, что первый эксперт более «квалифицированный», так как $P(A_1) < P(A_2)$.

Как видно из рис. 1 точка с координатами $P(A_1)$=0.05 и $P(A_2)$=0.08, расположена ниже границы, соответствующей λ. = 2.33. Следовательно объект должен быть отнесен к классу V_2, хотя более квалифицированный эксперт A_1 принял противоположное решение.

Для проверки обоснованности решения в пользу класса V_2 определим по формуле Байеса апостериорные вероятности классов в рассматриваемой ситуации S_{12} :

$$P(V_1/S_{12}) = \frac{P(V_1)P(S_{12}/V_1)}{P(S_{12})} = \frac{0.3\cdot(1-0.05)\cdot 0.08}{0.3\cdot(1-0.05)\cdot 0.08 + 0.7\cdot 0.05\cdot(1-0.08)} = 0.415 \qquad (13)$$

и

$$P(V_2/S_{12}) = \frac{P(V_2)P(S_{12}/V_2)}{P(S_{12})} = \frac{0.7\cdot 0.05\cdot(1-0.08)}{0.3\cdot(1-0.05)\cdot 0.08 + 0.7\cdot 0.05\cdot(1-0.08)} = 0.585\,. \qquad (14)$$

Как видим $P(V_1/S_{12}) < P(V_2/S_{12})$, и значит объект действительно следует отнести к классу V_2.

Изменим в условиях примера соотношения априорных вероятностей классов, положив $P(V_1)$ = 0.4, $P(V_2)$ = 0.6. В этом случае λ = 0.67 и, как видно из рис. 1, точка с координатами $P(A_1)$=0.05 и $P(A_2)$=0.08 попадает уже в область решений в пользу класса V_1. В самом деле

$$P(V_1/S_{12}) = \frac{0.4\cdot(1-0.05)\cdot 0.08}{0.4\cdot(1-0.05)\cdot 0.08 + 0.6\cdot 0.05\cdot(1-0.08)} = 0.524$$

и

$$P(V_2/S_{12}) = \frac{0.6\cdot 0.05\cdot(1-0.08)}{0.4\cdot(1-0.05)\cdot 0.08 + 0.6\cdot 0.05\cdot(1-0.08)} = 0.476\,,$$

т.е. $P(V_1/S_{12}) > P(V_2/S_{12})$. Значит в этом случае объект следует отнести к классу V_2, что совпадает с решением более «квалифицированного» эксперта A_1.

Итак мы показали, что при различных решениях двух независимых экспертов с фиксированными вероятностями ошибок окончательное решение изменяется с изменением λ.

Заметим, что рассматриваемая схема принятия решений основывается на знании весьма ограниченных вероятностных характеристик, которые при решении практических задач, в частности задач медицинской и технической диагностики, легко могут быть получены на основании предыдущего опыта. При достаточном числе наблюдений вероятности $P(V_k)$ и $P(A_i)$ могут быть оценены соответствующими частотами:

$$P^*(V_k) = G_k / G, \qquad P^*(A_i) = E_i / G,$$

где G_k – общее число появлений k-го класса (k=1,2) в выборке из G наблюдений, а E_i – общее число ошибок i-го эксперта (i =1,2) в этой же выборке.

При этом совершенно не требуется знать, на основании какой информации эксперты принимают частные решения и как именно эксперты принимают эти решения – используя формальный или эвристический алгоритм, либо просто полагаясь на свою интуицию.

В то же время мы сделали одно важное допущение о том, что решения экспертов независимы, а вероятность ошибки каждого эксперта не зависит от класса, т.е. $P(A_i)=P(A_i/V_1)=P(A_i/V_2)$. Естественно, что такое допущение должно быть обосновано.

Для того, чтобы продемонстрировать практическую возможность описанной схемы, рассмотрим один из возможных формальных алгоритмов принятия независимых решений двумя экспертами.

Предположим, что эксперт A_1 классифицирует объект по бинарному признаку x_1 (симптому), имеющему всего лишь две градации x_1^- и x_1^+, а эксперт A_2 - по другому признаку x_2, также имеющему две градации x_2^- и x_2^+. Будем считать, что для минимизации вероятности ошибок оба эксперта используют правило максимума апостериорных вероятностей, т. е. эксперт A_1 принимает свое частное решение по максимуму $P(V_1/x_1)$ и $P(V_1/x_1)$, а эксперт A_2 - по максимуму $P(V_1/x_2)$ и $P(V_1/x_2)$.

Будем считать, что $P(V_1)$=0.3, $P(V_2)$=0.7, а также заданы условные распределения значений признаков в классах V_1 и V_2, которые представлены в таблицах 1 и 2 соответственно .

Таблица 1

	$x_2 = x_2^-$	$x_2 = x_2^+$	$p(x_1/V_1)$
$x_1 = x_1^-$	0.076	0.874	0.95
$x_1 = x_1^+$	0.004	0.046	0.05
$p(x_2/V_1)$	0.08	0.92	

Таблица 2

	$x_2 = x_2^-$	$x_2 = x_2^+$	$p(x_1/V_2$
$x_1 = x_1^-$	0.046	0.004	0.05
$x_1 = x_1^+$	0.874	0.076	0.95
$p(x_2/V_2)$	0.92	0.08	

Для определения вероятности ошибочных решений эксперта A_1 найдем апостериорные вероятности классов при возможных значениях признака x_1:

$$P(V_1 / x_1^-) = \frac{P(V_1)p(x_1^-/V_1)}{P(V_1)p(x_1^-/V_1)+P(V_2)p(x_1^-/V_2)} = \frac{0.3\cdot 0.95}{0.3\cdot 0.95+0.7\cdot 0.05} = 0.891,$$

$$P(V_2 / x_1^-) = \frac{P(V_2)p(x_1^-/V_2)}{P(V_1)p(x_1^-/V_1)+P(V_2)p(x_1^-/V_2)} = \frac{0.7\cdot 0.05}{0.3\cdot 0.95+0.7\cdot 0.05} = 0.109 ,$$

$$P(V_1 / x_1^+) = \frac{P(V_1)p(x_1^+/V_1)}{P(V_1)p(x_1^+/V_1)+P(V_2)p(x_1^+/V_2)} = \frac{0.3\cdot 0.05}{0.3\cdot 0.05+0.7\cdot 0.95} = 0.022,$$

$$P(V_2 / x_1^+) = \frac{P(V_2)p(x_1^+/V_2)}{P(V_1)p(x_1^+/V_1)+P(V_2)p(x_1^+/V_2)} = \frac{0.7\cdot 0.95}{0.3\cdot 0.05+0.7\cdot 0.95} = 0.978.$$

Поскольку $P(V_1/x_1^-) > P(V_2/x_1^-)$ и $P(V_1/x_1^+) < P(V_2/x_1^+)$, то эксперт A_1 классифицирует объект Z по признаку x_1 следующим образом

$$\delta_1(Z) = \begin{cases} 1, & если\ x_1 = x_1^-, \\ 2, & если\ x_1 = x_1^+. \end{cases} \qquad (15)$$

Легко видно, что $P(x_1 = x_1^+ / V_1) = P(x_1 = x_1^- / V_2) = 0.05$, а значит вероятность ошибки первого эксперта не зависит от класса, т.е. $P(A_1)=P(A_1/V_1)=P(A_1/V_2)$ =0.05.

Для определения вероятности ошибочных решений эксперта A_2 найдем апостериорные вероятности классов при возможных значениях признака x_2:

$$P(V_1/x_2^-)=\frac{P(V_1)p(x_2^-/V_1)}{P(V_1)p(x_2^-/V_1)+P(V_2)p(x_2^-/V_2)}=\frac{0.3\cdot 0.08}{0.3\cdot 0.08+0.7\cdot 0.92}=0.036,$$

$$P(V_2/x_2^-)=\frac{P(V_2)p(x_2^-/V_2)}{P(V_1)p(x_2^-/V_1)+P(V_2)p(x_2^-/V_2)}=\frac{0.7\cdot 0.92}{0.3\cdot 0.08+0.7\cdot 0.92}=0.964,$$

$$P(V_1/x_2^+)=\frac{P(V_1)p(x_2^+/V_1)}{P(V_1)p(x_2^+/V_1)+P(V_2)p(x_2^+/V_2)}=\frac{0.3\cdot 0.92}{0.3\cdot 0.92+0.7\cdot 0.08}=0.831,$$

$$P(V_2/x_2^+)=\frac{P(V_2)p(x_2^+/V_2)}{P(V_1)p(x_2^+/V_1)+P(V_2)p(x_2^+/V_2)}=\frac{0.7\cdot 0.08}{0.3\cdot 0.92+0.7\cdot 0.08}=0.169.$$

Поскольку $P(V_1/x_2^-)<P(V_2/x_2^-)$, а $P(V_1/x_2^+)>P(V_2/x_2^+)$, то эксперт A_2 классифицирует объект Z по признаку x_2 следующим образом

$$\delta_2(Z)=\begin{cases}1, & если\ x_2=x_2^+,\\ 2, & если\ x_2=x_2^-.\end{cases} \qquad (16)$$

При этом вероятность ошибки эксперта A_2 составляет $P(A_2)$=0.08, причем эта вероятность также не зависит от класса, т.е. $P(A_2)= P(A_2/V_1) = P(A_2/V_2)$.

Как видно из таблиц 1 и 2 признаки x_1 и x_2 статистически независимы в обоих классах, поскольку для любых их значений справедливо соотношение $p(x_1,x_2/V_k) = p(x_1/V_k)p(x_2/V_k)$ при k =1,2. Отсюда непосредственно следует, что решения (15),(16) экспертов будут независимыми.

Предположим, что в момент принятия решений признаки получили следующие значения $x_1=x_1^-$, а $x_2=x_2^-$. В этом случае, согласно (15), (16), $\delta_1(Z)$ = 1 и $\delta_2(Z)$ = 2, т.е. требуется принять окончательное решение в условиях противоречивой ситуации S_{12}. Поскольку априорные вероятности классов и найденные вероятности ошибок экспертов имеют такие же значения, как в первой части рассмотренного выше примера, то, согласно предложенной схеме, окончательное решение следует принимать в пользу V_2.

Покажем, что такое решение совпадает с оптимальным решением, основанным на результатах измерения совокупности двух признаков по формальному правилу максимуму апостериорных вероятностей классов $P(V_1/x_1,x_2)$ и $P(V_1/x_1,x_2)$. По формуле Байеса определим эти вероятности при $x_1 = x_1^-$ и $x_2 = x_2^-$:

$$P(V_1/x_1^- x_2^-) = \frac{P(V_1)p(x_1^-,\chi_2^-/V_1)}{P(V_1)p(x_1^-,\chi_2^-/V_1)+P(V_2)p(x_1^-,\chi_2^-/V_2)} = \frac{0.3\cdot 0.076}{0.3\cdot 0.076+0.7\cdot 0.046} = 0.415 \quad (17)$$

и

$$P(V_2/x_1^- x_2^-) = \frac{P(V_2)p(x_1^-,\chi_2^-/V_2)}{P(V_1)p(x_1^-,\chi_2^-/V_1)+P(V_2)p(x_1^-,\chi_2^-/V_2)} = \frac{0.7\cdot 0.046}{0.3\cdot 0.076+0.7\cdot 0.046} = 0.585. \quad (18)$$

Сравнение (13),(14) с (17),(18) позволяет заключить, что $P(V_k/x_1^-,x_2^-) = P(V_k/S_{12})$ для k =1,2. Нетрудно убедиться в том, что аналогичные равенства имеют место и при других возможных значениях признаков.

Следовательно, если эксперты принимают независимые решения, причем $P(A_i/V_1)=P(A_i/V_2)$ при i =1,2, то предлагаемая схема эквивалентна оптимальной, обеспечивающей минимум средней вероятности ошибочной классификации по совокупности двух независимых признаков в классах.

В условиях данного примера средняя вероятность ошибочных решений, принимаемых по результатам классификации двух экспертов, составляет 0.0406. Заметим, что эта величина меньше вероятности ошибки каждого из экспертов.

Решающее правило 2. Предложенную схему легко можно обобщить на случай, когда вероятности ошибок экспертов зависят от классов. Такое обобщение актуально для решения практических задач, в частности, задач медицинской диагностики.

Пусть требуется отнести обследуемого пациента Z к одному из двух классов: V_1 – болен, V_2 – здоров. При этом будем считать известными априорные вероятности $P(V_1)$, $P(V_2)$, и ставить окончательный диагноз на основании информации, полученной от двух экспертов A_1, A_2, которые производят независимое обследование пациента по различным методикам.

Будем, как это принято в медицинской практике [23], оценивать «квалификацию» каждого из экспертов двумя величинами: чувствительностью Q_i = 1- $P(A_i/V_1)$, где вероятность $P(A_i/V_1)$ ошибочного отнесения больного пациента к здоровому, и специфичностью W_i = 1- $P(A_i/V_2)$, где вероятность $P(A_i/V_2)$ ошибочного отнесения здорового пациента к больному[1].

Тогда в ситуации S_{12}, когда A_1 признал Z больным, а A_2 признал Z здоровым, окончательный диагноз следует ставить согласно схеме:

$$\begin{array}{l} Z\ \text{болен,}\quad \text{если } Q_1(1-Q_2) > \lambda[1-W_1]W_2, \\ Z\ \text{здоров, если } Q_1(1-Q_2) < \lambda[1-W_1]W_2, \end{array} \qquad (19)$$

где $\lambda = P(V_2)/P(V_1)$ – отношение априорных вероятностей здоровых и больных пациентов.

Решающее правило 3. Предположим теперь, что N >2 экспертов проводят независимое обследования пациента Z, в результате которых относят его к классу V_1 (болен) или к классу V_2 (здоров). Будем считать, что известны априорные вероятности $P(V_1)$ и $P(V_2)$, чувствительности Q_1, …, Q_N и специфичности $W_1,\dots,W_N$ каждого из экспертов.

Пусть в результате обследования получена комбинация S решений экспертов. Обозначим I_1 - множество номеров экспертов, которые приняли решение в пользу класса V_1, т.е. признали Z больным, а I_2 - множество номеров экспертов, которые признали пациента здоровым. Очевидно, что $I_1 \cap I_2 = \varnothing$; $I_1 \cup I_2 = \{1,...,N\}$.

Тогда в ситуации S будем считать, что Z болен, если

$$\prod_{i\in I_1} Q_i \prod_{i\in I_2}(1-Q_i) > \lambda \prod_{i\in I_2}(1-W_i)\prod_{i\in I_1} W_i\,, \qquad (20)$$

и Z здоров, если

$$\prod_{i\in I_1} Q_i \prod_{i\in I_2}(1-Q_i) < \lambda \prod_{i\in I_2}(1-W_i)\prod_{i\in I_1} W_i\,. \qquad (21)$$

[1] В теории распознавания вероятности $P(A_i/V_1)$ и $P(A_i/V_2)$ принято называть вероятностями ошибок первого и второго рода, или, что то же самое , вероятностями ошибок пропуска цели и ложной тревоги [24].

Решающее правило 4. Рассмотрим теперь общий случай, когда требуется отнести объект Z к одному из $M > 2$ классов $V_1,..., V_M$. Будем полагать, что известны априорные вероятности классов $P(V_1),..., P(V_M)$ и условные вероятности ошибочных решений $P(A_1/V_k),...,P(A_N/V_k)$, $(k=1,…,M)$, принимаемых N независимыми экспертами $A_1,...,A_N$.

Пусть в результате обследования Z получена комбинация S частных решений экспертов. Обозначим I_m - множество номеров экспертов, принявших решение в пользу m-го класса. Очевидно, что $I_i \cap I_j = \varnothing$ ($i, j = 1,...,M$), $I_1 \cup ... \cup I_M = \{1,...,N\}$.

В этом случае окончательное решение в пользу m-го класса будем принимать только в том случае, когда

$$P(V_m/S) = \max_{k=1,...,M} P(V_k/S). \tag{22}$$

По формуле Байеса условие (22) эквивалентно следующему:

$$P(V_m)P(S/V_m) = \max_{k=1,...,M} P(V_k)P(S/V_k),$$

или, что то же самое,

$$P(V_m)P(S/V_m) > P(V_k)P(S/V_k), \ \forall\ k=1,...,M,\ k \neq m \tag{23}$$

Поскольку для любых $m, k =1,..., M$ решения экспертов независимы, то

$$P(S/V_m) = \prod_{j \in I_m} [1 - P(A_j/V_m)] \prod_{j \notin I_m} P(A_j/V_m),$$
$$P(S/V_k) = \prod_{j \in I_k} [1 - P(A_j/V_k)] \prod_{j \notin I_k} P(A_k/V_k),$$

На основании условия (23) с учетом последних соотношений заключаем, что окончательное решение принимается в пользу класса V_m , если

$\forall\ k=1,...,M,\ k \neq m$ выполняется неравенство:

$$P(V_m) \prod_{j \in I_m} [1 - P(A_j/V_m)] \prod_{j \notin I_m} P(A_j/V_m) > P(V_k) \prod_{j \in I_k} [1 - P(A_j/V_k)] \prod_{j \notin I_k} P(A_k/V_k) \ . \tag{24}$$

Заключение. В статье показано, что в условиях противоречивой информации от независимых экспертов правомерно принимать окончательное решение, совпадающее с решением более квалифицированного эксперта, только при равновероятных классах. В более общем случае для минимизации вероятности ошибочных классификаций следует учитывать как вероятности ошибочных классификаций каждого из экспертов, так и соотношения априорных вероятностей классов.

Рассмотрены правила интеграции частных решений независимых экспертов, которые можно пользоваться даже в тех практически важных случаях, когда эксперты принимают свои решения неформально, опираясь на опыт и интуицию.

Предложенный подход нашел применение при построении комплексного решающего правила для диагностики кардиологических патологий у больных с неизмененной ЭКГ по результатам автоматического анализа карт плотностей тока в плоскости сердца [25].

1. *Ларичев О.И.* Наука и искусство принятия решений. – М: Наука, 1979. – 200 с.

2. *Макаров И.М.* Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука,1987. – 350 с.

3. *Выявление* экспертных знаний/О.И. Ларичев , А.И. Мечитов , Е.М.Мошкович , Е. М. Фуремс .– М.: Наука, 1989.– 128 с.

4. *Макеев С.П., Шахнов И.Ф.* Упорядочение альтернатив на основе расплывчатых оценок: Сообщения по прикладной математике.– М.: ВЦАН СССР, 1989. – 42 с.

6. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

7. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М: Мир, 1991. – 464 с.

8. *Биргер И.А.* Техническая диагностика. – М.:Машиностроение, 1978.- 240 с.

9. *Барабаш Ю.Л.* Коллективные статистические решения при распознавании. – М.: Радио и связь, 1983. – 224 с.

10. *On combining classifiers*/ J. Kittler, M. Hatef, R.P.W. Duin, J. Matas// IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.- 1998.- № 20.- P. 226–239.

11. *Pranke J., Mandler E.* A Comparison of Two Approaches for Combining the Votes of Cooperating Classifiers // Proceedings 11-th IAPR International Conference on Pattern Recognition,1992.- V. 2.- P. 611-614.

12. *Kimura F., Shridhar M* Handwritten numerical recognition based on multiple algorithms// Pattern Recognition, 1991.- V. 24.- No. 10.- P. 969-983.

13. *Ho T.K., Hull J.J., Srihari S.N.* Decision combination in multiple classifier systems//IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1994.- V.16.- No. 1, 1994, P. 66-75.

14. *Bagui S.C., Pal N.R.* A multistage generalization of the rank nearest neighbor classification rule // Pattern Recognition Letters, 1995.- V. 16.- No. 6.- P. 801-614.

15. *Hashem S., Schmeiser* B. Improving model accuracy using optimal linear combinations of trained neural networks// IEEE Transactions on Neural Networks,1995.- V.6.- No. 3.- P. 792-794.

16. *Xu L., Krzyzak A., Suen C.Y.* Methods of combining multiple classifiers and their applications to handwriting recognition// IEEE Trans. SMC,1992.- V. 22.- No. 3.- P. 418-435.

17. *Cho S.B.,Kim J.H.* Multiple network fusion using fuzzy logic// IEEE Transactions on Neural Networks.- 1995.- V. 6.- No. 2.- P. 497-501.

18. *Krogh A., Vedelsby J.* Neural network ensembles, cross validation, and active learning // Advances in neural information processing systems, 1995.- MIT Press.- Cambridge MA.-278 P.

19. *Wolpert D.H.* Stacked generalization// Neural Networks,1992.- V. 5.- No. 2.- P. 241-260.

20. *Woods K.S., Bowyer K., Kergelmeyer W.P.* Combination of multiple classifiers using local accuracy estimates// Proc. of CVPR98,1996.- P. 391-396.

21.*Hansen L.K., Salamon P.* Neural network ensembles// IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1990.- V.12, No. 10.- P. 993- 1001.

22. *Миркин Б.Г.* Анализ качественных признаков и структур .- М.: Статистика, 1980.- 320 с.

23. Власов В.В. Эффективность диагностических исследований. - М.: Медицина, 1988. - 256 с.

24. Васильев В.И. Распознающие системы. -Киев: Наукова думка, 1983.- 422 с.

25. *Possibilities* of Magnetocardiography in Coronary Artery Disease Detection in Patient with Normal or Unspecifically Changes ECG/I.Chaikovsky, F.Steinberg, B.Heiler, V.Sosnitsky, N.Budnic, L.Fainzilberg // Proceeding of the 3-th International Congress on Coronary Artery Disease (Lyon, France, October 2-5, 2000), 2000.- P. 415-422.