

УДК 681.3.06.14

## ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ МЕТОДА ПРИНЯТИЯ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПО МИНИМУМУ РАССТОЯНИЙ ДО ЭТАЛОНОВ

Л.С. Файнзильберг

Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем  
e-mail: fainzilberg@voliacable.com

При построении систем поддержки принятия решений конструктору часто приходится делать выбор в пользу того или иного алгоритма. Если такой выбор делать *только* на основе «здравого смысла», то, как показано в работе [1], это иногда может приводить к абсурдным результатам. На шуточном примере было показано, что при необоснованной схеме решений телевизор с отвратительным звуком, но прекрасным изображением может быть ошибочно признан хорошим.

**Цель настоящего доклада** – продолжить обсуждение темы правдоподобных, но неверных решений, основанных на измерении совокупности диагностических признаков.

Диагностику состояния технических и биологических объектов часто рассматривают с позиции теории распознавания образов. Предполагается, что объект находится в одном из  $M \geq 2$  возможных состояний  $V_1, \dots, V_M$ . Имеется совокупность характеристик объекта (признаков), образующих  $N$ -мерный вектор  $x^{(N)} = (x_1, \dots, x_N) \in X^{(N)}$ . Требуется построить решающее правило  $s = D(x^{(N)})$ , которое отображает множество  $X^{(N)}$  значений признаков  $x_1, \dots, x_N$  на множество  $\{1, \dots, M\}$  номеров возможных диагнозов  $V_1, \dots, V_M$ . Другими словами, требуется построить алгоритм определения значений индикаторной переменной  $S$  в виде

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } x^{(N)} \in \Omega_1 \\ \dots & \\ M, & \text{если } x^{(N)} \in \Omega_M \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\Omega_m$  – непересекающиеся области в пространстве признаков  $x_1, \dots, x_N$ , в которых принимаются решения в пользу класса  $V_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ .

При решении прикладных задач часто разработчиков привлекает один из известных методов распознавания образов, основанный на вычислении и сравнении расстояний от наблюдаемого объекта до эталонов классов  $V_1, \dots, V_M$  [2]. Считается, что эталоны можно построить по обучающей выборке наблюдений с известной принадлежностью к классам.

Например, при  $M = 2$  по обучающей выборке

$$(x_1^{(N)}, U_1), (x_2^{(N)}, U_2), (x_3^{(N)}, U_3), \dots, (x_K^{(N)}, U_K),$$

с указаниями «учителя», выраженными в форме

$$U_j = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j^{(N)} \text{ объект класса } V_1 \\ 2, & \text{если } x_j^{(N)} \text{ объект класса } V_2 \end{cases}, \quad j = 1, \dots, K,$$

можно построить два эталона (вектора)

$$X_{01} = (x_{11}^0, x_{12}^0, \dots, x_{1N}^0) \text{ и } X_{02} = (x_{21}^0, x_{22}^0, \dots, x_{2N}^0),$$

компоненты которых вычисляются по формуле

$$x_{mi}^0 = \frac{1}{K_m} \sum_{i=1}^{K_m} x_{mi}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \quad (2)$$

где  $K_m$  – число объектов  $m$ -го класса в обучающей выборке

Заметим, что такие эталоны, которые представляют собой усреднённые по выборке абстрактные объекты, могут не совпадать ни с одним из реальных объектов обучающей выборки и даже ни с одним из объектов генеральной совокупности. Тем не менее для нового объекта, который не входит в обучающую выборку, можно определить расстояния (например, евклидовы расстояния) до эталонов  $X_{01}$  и  $X_{02}$  и принимать решение в пользу того класса, к эталону которого ближе предъявляемый образ (рис. 1).

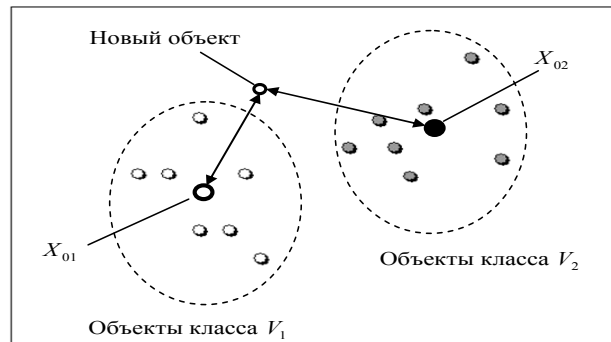


Рис.1. Иллюстрация метода распознавания по минимуму расстояний до эталонов

Как видно метод достаточно прост в реализации и с точки зрения здравого смысла представляется вполне разумным. Более того, иногда этот эвристический метод позволяет получать приемлемые для практики результаты даже в наиболее сложных ситуациях, когда собственные области классов

$$X_m^{(N)} \triangleq \{ x^{(N)} : p(x^{(N)} / V_m) \neq 0 \}, \quad m = 1, 2, \quad (3)$$

на которых сосредоточены многомерные условные распределения  $p(x^{(N)} / V_m)$ , пересекаются в пространстве признаков  $x_1, \dots, x_N$ , т.е.

$$X_1^{(N)} \cap X_2^{(N)} \neq \emptyset. \quad (4)$$

В то же время алгоритм, основанный на сравнении расстояний до эталонов, не всегда оправдан и может привести к ошибочным решениям, даже если

$$X_1^{(N)} \cap X_2^{(N)} = \emptyset. \quad (5)$$

Дело в том, что классификатор, основанный на принципе минимального расстояния до эталонов, представляет собой частный случай *линейного* классификатора [2]. Легко показать, что в простейшем случае, когда имеется всего лишь два признака  $x_1$  и  $x_2$ , геометрическое место точек на плоскости  $(x_1, x_2)$ , равноудаленных от  $X_{01}$  и  $X_{02}$ , представляет собой прямую, которая под прямым углом проходит через середину отрезка, соединяющего точки  $X_{01}$  и  $X_{02}$ .

Отсюда как раз и следует, что если собственные области классов  $X_1^{(N)}$  и  $X_2^{(N)}$  не выпуклы, то линейный классификатор может приводить к ошибочным решениям даже в благоприятных ситуациях, когда выполняется условия (5).

Поскольку конкретные примеры довольно часто оказываются более убедительными, чем общие рассуждения, вернемся снова к шуточному примеру, рассмотренному в [1].

Пусть для диагностики качества телевизора используются два диагностических признака: качество звука и качество изображения, которые тем или иным способом оцениваются интервальными величинами  $x_1 \in [0,1]$  и  $x_2 \in [0,1]$  соответственно.

Будем считать, что телевизор имеет приемлемый звук, если  $x_1 > 0,5$ , и хорошее изображение, если  $x_2 > 0,5$ . Поскольку плохой звук не может быть компенсирован хорошим изображением и наоборот, то в пространстве признаков  $x_1$  и  $x_2$  области качественного  $V_1$  и некачественного  $V_2$  телевизоров выглядят так, как показано на рис. 2.

Следовательно «оптимальные» решения должны приниматься по правилу

$$\begin{aligned} &\text{решаем в пользу } V_1, \text{ если } (x_1 > 0,5) \wedge (x_2 > 0,5); \\ &\text{решаем в пользу } V_2 \text{ в противном случае.} \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим теперь, что для диагностики качества телевизоров мы хотим воспользоваться алгоритмом сравнения расстояний до эталонов. Будем полагать, что на этапе «обучения» точки качественных и некачественных телевизоров *равномерно* заполнили соответствующие области пространства признаков. В этом случае эталонам  $X_{01}$  и  $X_{02}$  будут соответствовать центры масс областей  $V_1$  и  $V_2$ , которые имеют координаты

$$X_{01} = (0,75 ; 0,75) \text{ и } X_{02} \approx (0,417 ; 0,417). \quad (7)$$

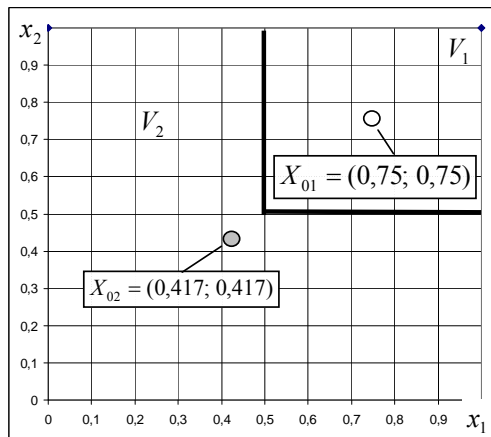


Рис. 2. Эталоны качественных  $V_1$  и некачественных  $V_2$  телевизоров

Геометрическое место точек, равноудаленных от  $X_{01}$  и  $X_{02}$ , определяет прямая  $\beta$  (рис. 3), которая под прямым углом проходит через середину отрезка  $\alpha$ , соединяющего точки  $X_{01}$  и  $X_{02}$ . В соответствии с имеющимися данными уравнение прямой  $\beta$  имеет вид

$$x_2 + x_1 - 1,17 = 0. \quad (8)$$

Прямая  $\beta$  разделяет пространство признаков  $x_1$  и  $x_2$  на две области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  решений, принимаемых по минимуму расстояний до эталонов  $X_{01}$  и  $X_{02}$ :

$$\begin{aligned} &\text{решаем в пользу } V_1, \text{ если } x=(x_1, x_2) \in \Omega_1. \\ &\text{решаем в пользу } V_2, \text{ если } x=(x_1, x_2) \in \Omega_2 \end{aligned} \quad (9)$$

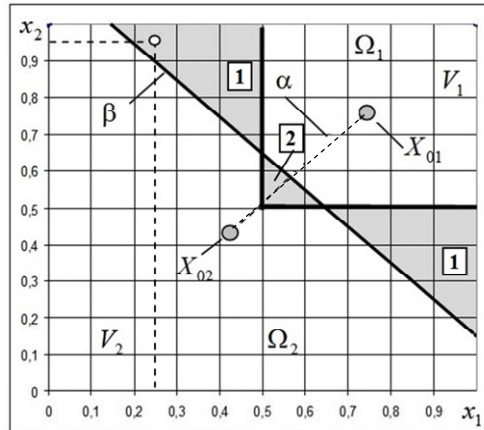


Рис. 3. Области решений  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в пространстве признаков  $x_1$  и  $x_2$

Легко видно, что решения, принимаемые по правилу (9), приводят к ошибкам: в областях 1 некачественные телевизоры будут признаваться качественными, а в области 2 качественные телевизоры будут отнесены к некачественным.

Например, телевизор с отвратительным звуком  $x_1 = 0,25$  будет признан качественным только потому, что он имеет хорошее изображение  $x_2 = 0,95$ .

Для оценки чувствительности  $S_E$  и специфичности  $S_P$  правила (9) воспользуемся формулами

$$S_E = \frac{W_B - W_1}{W_B}; \quad S_P = \frac{W_G - W_2}{W_G} \quad (10)$$

в которых  $W_G$ ,  $W_B$  – площади собственных областей качественных (класс  $V_1$ ) и некачественных (класс  $V_2$ ) телевизоров, а  $W_1$ ,  $W_2$  – площади областей 1 и 2 соответственно.

В соответствии с имеющимися данными получим

$$S_E \approx \frac{0,75 - 0,1225}{0,75} \approx 0,837; \quad S_P \approx \frac{0,25 - 0,00125}{0,25} \approx 0,995. \quad (11)$$

Следовательно правило (9), построенное по критерию минимума расстояний до эталонов  $X_{01}$  и  $X_{02}$ , почти в 20 % приводит к ошибочным решениям.

**Вывод:** При решении практических задач следует осмотрительно подходить к использованию алгоритмов принятия решений, основанных на минимуме расстояний до эталонов.

#### Список литературы

1. Файнзильберг Л.С. Правдоподобные, но неверные решения при построении диагностических правил // Материалы восьмой дистанционной научно-практической конференции с международным участием “Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР ’2012”. – Киев: ИПММС НАН Украины, 2012. – С. 31-34.

2. Ту Д., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов (перевод с англ.). – М.: Мир, 1978. – 411 с.